33. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe
Aufgaben
Olympiadeklasse 9
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

330941

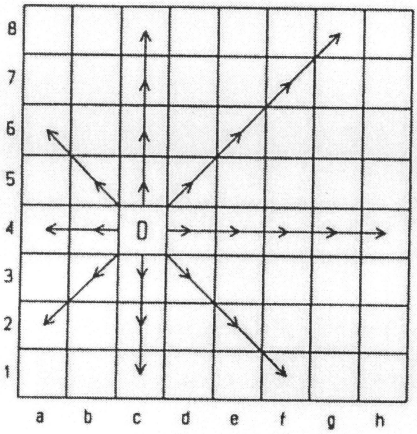

Abb. A 330941

Auf einem Schachbrett wird eine Figur „Dame" betrachtet, die wie im Schachspiel ziehen kann, also in den acht Richtungen parallel zum Brettrand oder diagonal, jeweils beliebig viele Felder. (Siehe z.B. in Abb. A 330941 alle von c4 aus möglichen Züge.)

Als *Länge eines Zuges* werde stets die Streckenlänge vom Mittelpunkt des Anfangsfeldes zum Mittelpunkt des Zielfeldes des Zuges bezeichnet. Dabei werde die Seitenlänge jedes der 64 quadratischen Felder als Längeneinheit genommen.

Gesucht wird eine Zugfolge, die den folgenden Bedingungen genügt:

(1) Bei jedem Zug der Zugfolge - mit Ausnahme des letzten - soll der Zug, der sich anschließt (d.h. als Startfeld das eben erreichte Zielfeld hat), eine *größere Länge* haben als der Zug, an den er sich anschließt.

(2) Das Zielfeld des letzten Zuges soll dem Startfeld des ersten Zuges *benachbart* sein (und zwar eine Seite mit ihm gemeinsam haben, nicht nur eine Ecke).

(3) Die Zugfolge soll in der Summe der Längen ihrer Züge *von keiner Zugfolge, die den Bedingungen* (1) *und* (2) *genügt, übertroffen* werden.

Geben Sie eine Zugfolge an und beweisen Sie, daß sie die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt!

330942

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a,b,c) positiver ganzer Zahlen a, b, c, von denen keine größer als 100 ist und mit denen die Ungleichungen $a+b \geq 101$, $a+c \leq 101$ und $a+b+c \geq 201$ gelten!

330943

Zu einem regelmäßigen Achteck werde ein Quadrat so konstruiert, daß der Mittelpunkt des Achtecks ein Eckpunkt des Quadrats ist und daß zwischen der Seitenlänge a des Achtecks und der Seitenlänge b des Quadrats die Ungleichung $b \geq \frac{4}{3} a$ gilt. Dann bezeichne f den Flächeninhalt desjenigen Flächenstücks, das dem Achteck und dem Quadrat gemeinsam ist.

Man beweise, daß zu gegebenem Achteck für alle Quadrate, die dieser Beschreibung entsprechen, f denselben Wert hat.

33. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe
Aufgaben
Olympiadeklasse 9
2. Tag

330944

Jemand findet die Angabe

$$22! = 11240007277**607680000 .$$

Darin sind auch die zwei durch * angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 22! entsprechen.

Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie! Dabei darf verwendet werden, daß die angegebenen Ziffern korrekt sind.

Hinweis: Für jede positive ganze Zahl n wird n! definiert als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

330945

Bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems werde ein Punkt der Ebene „rational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde „irrational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde „gemischt" genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational und die andere irrational ist.

a) Gibt es in der Ebene Geraden, die nur Punkte einer Sorte enthalten? Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede der drei Sorten „rational", „irrational", „gemischt"!

b) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus genau zwei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist? Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten!

c) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?

330946

Ist P ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC, so kann folgende Konstruktion durchgeführt werden: Die Parallele durch P zu CB schneidet AB in S_1, die Parallele durch S_1 zu AC schneidet BC in S_2, die Parallele durch S_2 zu BA schneidet CA in S_3. In dieser Weise kann man für $k = 1,2,3,\ldots$ fortsetzen:

Die Parallele durch S_{3k} zu CB schneidet AB in S_{3k+1}, die Parallele durch S_{3k+1} zu AC schneidet BC in S_{3k+2}, die Parallele durch S_{3k+2} zu BA schneidet CA in S_{3k+3}.

Beweisen Sie, daß für jedes Dreieck ABC und jeden Punkt P im Innern dieses Dreiecks eine der so konstruierten Parallelen wieder durch P gehen muß!

33. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 9
1. Tag

330941 Lösung: 7 Punkte

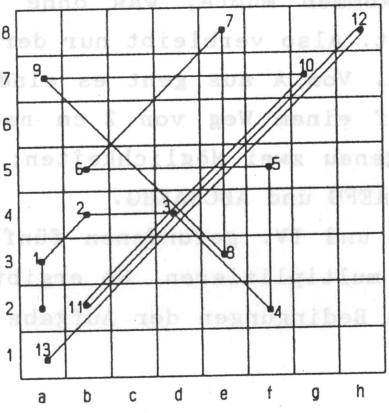

Abb. L 330941

Es gibt nur Züge der Längen

$$\left.\begin{array}{l} 1,\ \sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 3,\ 4,\ 3\sqrt{2}, \\ 5,\ 4\sqrt{2},\ 6,\ 7,\ 5\sqrt{2},\ 6\sqrt{2},\ 7\sqrt{2}. \end{array}\right\} \quad (*)$$

Wie aus $\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ folgt, sind sie in dieser Aufzählung (*) der Größe nach geordnet. Die Zugfolge a2 - a3 - b4 - d4 - f2 - f5 - b5 - e8 - e3 - a7 - g7 - b2 - h8 - a1 (Abb.L 330941) erfüllt (1) und (2). Ihre Züge haben die Längen (*) mit Ausnahme der Länge 7.

Angenommen nun, es gäbe eine Zugfolge, die ebenfalls (1),(2) erfüllt und in der Summe der Längen ihrer Züge die angegebene Zugfolge übertrifft. Da sie keine der Längen (*) mehrfach enthalten könnte, müßte sie die vier Längen 7, $5\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$, $7\sqrt{2}$ enthalten (und von den vorangehenden Längen 1, $\sqrt{2}$, ..., 6 könnten höchstens solche fehlen, deren Summe kleiner als 7 wäre). Für eine derartige Zugfolge würde gelten: Der letzte Zug der Länge $7\sqrt{2}$ müßte eine der Diagonalen a1-h8, h1-a8 vollständig durchschreiten. Der vorangehende Zug müßte auf derselben Diagonale in einem der Felder b2, g7, g2, b7 beginnen, der Zug davor (mit der Länge $5\sqrt{2}$) ebenfalls auf dieser Diagonale in dem dort jeweils anderen dieser Felder. Zu keinem dieser vier Felder führt aber ein Zug der Länge 7. Damit ist die obige Annahme widerlegt; d.h., die angegebene Zugfolge erfüllt auch (3).

330942 Lösung: 6 Punkte

I. Wenn positive ganze Zahlen a, b, c die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, so folgt: Addiert man die Ungleichungen $a+c \leq 101$ und $201 \leq a+b+c$, so ergibt sich $a+c+201 \leq 101+a+b+c$, nach Subtraktion von $a+c+101$ also $100 \leq b$. Da aber zu den Bedingungen der Aufgabe auch $b \leq 100$ gehört, folgt

$$b = 100 . \qquad (1)$$

Damit führt $a+b+c \geq 201$ auf $a+c \geq 101$. Zusammen mit $a+c \leq 101$ folgt $a+c = 101$. Diese Gleichung kann zusammen mit den Bedingungen $0 < a,c \leq 100$ und (1) nur von den Tripeln

$$(a,b,c) = (1,100,100)\ ,\ (2,100,99)\ ,\ldots,\ (100,100,1)$$

erfüllt werden.

II. Diese Tripel erfüllen alle Bedingungen der Aufgabe; denn sie enthalten nur positive ganze Zahlen, keine größer als 100, und für diese gilt $a+b \geq 101$, $a+c = 101$ und $a+b+c = 201$.

Daher erfüllen genau diese Tripel die Bedingungen der Aufgabe.

330943 Lösung: 7 Punkte

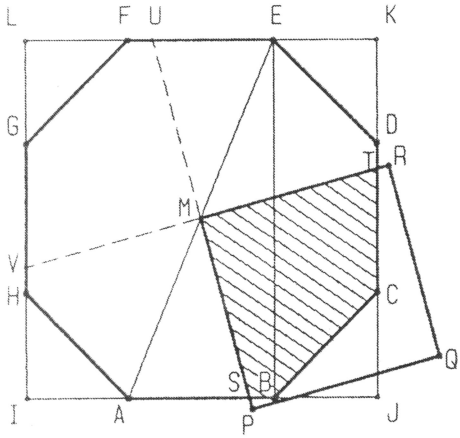

Abb. L 330943

Man zeigt zunächst, daß b wegen der Voraussetzung $b \geq \frac{4}{3}a$ größer als der Umkreisradius r des Achtecks ist. Hierzu kann r (z.B.) wie folgt ermittelt werden: Aus dem Achteck ABCDEFGH entsteht durch Verlängern der Seiten AB, CD, EF, GH ein Quadrat IJKL (siehe Abb. L 330943). Mit $\overline{AB} = \overline{BC} = \cdots = \overline{HA} = a$ wird $\overline{BJ} = \overline{JC} = \overline{DK} = \cdots = \overline{IA} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Es folgt $\overline{BE} = \overline{JK} = a(1+\sqrt{2})$, also nach dem Satz des Pythagoras $\overline{AE} = \sqrt{a^2 + a^2(1+\sqrt{2})^2} = a\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$.

Der Mittelpunkt M der Strecke AE ist der Mittelpunkt des Achtecks; somit gilt $r = \overline{MA} = \cdots = \overline{ME} = \cdots = \overline{MH} = \frac{1}{2}\overline{AE} = a\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}$. Wegen $49 > \frac{81}{2}$ gilt $7 > \frac{9}{2}\sqrt{2}$, $16 > 9(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $\frac{4}{3} > \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}$; aus $b \geq \frac{4}{3}a$ folgt daher in der Tat $b > r$.

Für jedes Quadrat MPQR, das der Beschreibung der Aufgabe entspricht, gilt somit: P, Q und R liegen außerhalb des Achtecks, MP schneidet dessen Umfang. Der Schnittpunkt S liege o.B.d.A. auf der Seite AB (eventuell mit einem ihrer Endpunkte, etwa B, zusammenfallend). Ferner schneidet MR die Seite CD in einem Punkt T; das Quadrat hat mit dem Achteck das Flächenstück MSBCT gemeinsam. Weiter gilt: Die Verlängerungen von PM und RM über M hinaus schneiden die Seiten EF bzw. GH jeweils in einem Punkt U bzw. V; und es ist $\overline{\measuredangle AMS} = \overline{\measuredangle CMT} = \overline{\measuredangle EMU} = \overline{\measuredangle GMV}$, wegen $\overline{MA} = \overline{MC} = \overline{ME} = \overline{MG}$ und $\overline{\measuredangle MSA} = \overline{\measuredangle MTC} = \overline{\measuredangle MUE} = \overline{\measuredangle MVG}$ nach dem Kongruenzsatz sww also $\Delta MSA \cong \Delta MTC \cong \Delta MUE \cong \Delta MVG$. Daher und wegen $\Delta MAB \cong \Delta MBC \cong \cdots \cong \Delta MHA$ sind auch die Flächenstücke MSBCT, MTDEU, MUFGV und MVHAS einander kongruent. Da das Achteck in diese vier Flächenstücke zerlegt ist, hat jedes von ihnen als Flächeninhalt f ein Viertel des Flächeninhalts des Achtecks.

Bemerkung: Den Flächeninhalt des Achtecks kann man erhalten, indem man vom Flächeninhalt des Quadrates IJKL den (vierfachen Flächeninhalt des Dreiecks BJC oder, was dasselbe ist, den) zweifachen Flächeninhalt eines Quadrates der Seitenlänge $\overline{BJ}$ subtrahiert. So ergibt sich $f = \frac{1}{4}\left(a^2(1+\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}a^2\right) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\cdot a^2$. Angabe und Herleitung einer solchen Formel werden laut Aufgabentext nicht vom Schüler verlangt.

Vorschläge zur Punktverteilung:

330941

Finden einer Zugfolge der geforderten Art	3
Nachweis ihrer Maximalität	4
	7

330942

Schluß auf b = 100 (oder entsprechend weiterführende Aussage)	2
Gewinnung der Tripel (1,100,100),...,(100,100,1)	3
Bestätigung der geforderten Bedingungen (kann auch in vorangehende Textteile eingearbeitet sein)	1
	6

330943

(Im Text oder aus Zeichnung ersichtliche) Einsicht in Erfordernis bzw. Herleitbarkeit der Aussage, daß stets die Quadrat-Ecken ≠ M außerhalb des Achtecks liegen	2
Gewinnung dieser Aussage (z.B. in der Gestalt b > r) aus der Voraussetzung b ≥ 4a/3	2
Schluß auf Zerlegung des Achtecks in vier flächengleiche Flächenstücke (oder anderer, z.B. mehr rechnerischer, Nachweis der Unabhängigkeit des Wertes f von Lage und Größe des - mit b ≥ 4a/3 vorausgesetzten - Quadrates MPQR)	3
	7

33. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 9
2. Tag

330944 Lösung: 6 Punkte

Für die gesuchten Ziffern x und y gilt:

Da $22! = 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot\cdots\cdot 22$ durch 9 und durch 11 teilbar ist, folgt nach den Teilbarkeitsregeln für diese Zahlen:

$$1+1+2+4+0+0+0+7+2+7+7+x+y+6+0+7+6+8+0+0+0+0 = 58+x+y \text{ ist durch 9 teilbar,} \quad (1)$$

$$-1+1-2+4-0+0-0+7-2+7-7+x-y+6-0+7-6+8-0+0-0+0 = 22+x-y \text{ ist durch 11 teilbar.} \quad (2)$$

Aus (2) folgt: $x-y$ ist durch 11 teilbar. Wegen $0 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y \leq 9$, also $-9 \leq x-y \leq 9$ ist das nur mit $x = y$ möglich. Aus (1) folgt damit: $58 + 2x$ ist durch 9 teilbar. Wegen $58 + 2x = 2\cdot(29 + x)$ und da 2 und 9 zueinander teilerfremd sind, muß auch $29 + x$ durch 9 teilbar sein. Wegen $0 \leq x \leq 9$ ist das nur für $x = 7$ der Fall.

Damit ist bewiesen: Die fehlenden Ziffern lauten beide 7.

330945 Lösung: 7 Punkte

Jede Gerade in der Ebene hat entweder eine Gleichung $x = c$ mit einer reellen Zahl c oder eine Gleichung $y = mx + n$ mit reellen Zahlen m und n. Nun wird gezeigt:

a) I. Es gibt keine Gerade, die nur „rationale" Punkte enthält.
Beweis: In beiden Gleichungsformen $x = c$, $y = mx + n$ kann für die unabhängig zu wählende Variable (y bzw. x) eine irrationale Zahl eingesetzt werden.

II. Mit Vertauschung von „rational", „irrational" folgt ebenso: Es gibt keine Gerade, die nur „irrationale" Punkte enthält.

III. Es gibt keine Gerade, die nur „gemischte" Punkte enthält.
Beweis: In jeder Geraden $x = c$ mit rationalem bzw. irrationalem c ist zum Beispiel (c,c) ein „rationaler" bzw. ein „irrationaler" Punkt. In jeder Geraden $y = mx + n$ mit rationalem n ist $(0,n)$ ein „rationaler" Punkt. In jeder Geraden $y = mx + n$ mit irrationalem n ist beispielsweise jeweils als ein „irrationaler" Punkt enthalten: $\left(\frac{1}{m}, 1+n\right)$, falls m irrational ist; $(n,(m+1)n)$, falls m rational ist und $m \neq -1$ gilt; $(-n,2n)$, falls $m = -1$ gilt.

b) Für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten gibt es Geraden, die (mindestens) je einen Punkt der zwei zusammengestellten Sorten, aber keinen Punkt der dritten Sorte enthalten. Zum Beweis genügt es, beispielsweise zu bestätigen:

I. Die Gerade $y = x$ enthält „rationale" und „irrationale" Punkte (nämlich für rationales bzw. irrationales x), aber keinen „gemischten" Punkt.

II. Entsprechend ist etwa die Gerade $x = 0$ ein Beispiel für die Zusammenstellung „rational"/„gemischt",

III. die Gerade $x = \sqrt{2}$ ein Beispiel für „gemischt"/„irrational".

c) Es gibt Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist. Beweis: Beispielsweise enthält die Gerade $y = x\cdot\sqrt{2}$ den „rationalen" Punkt (0,0), den „gemischten" Punkt ($\sqrt{2}$, 2) und den „irrationalen" Punkt ($\sqrt{3}$,$\sqrt{6}$).

<u>Hinweis:</u> In mehreren Beweisteilen (auch bei anderen Möglichkeiten der Beweisführung) werden Sätze der folgenden Art herangezogen: Sind a und b rational, so auch $a+b$, $a\cdot b$ und (falls $b \neq 0$ ist) $\frac{1}{b}$. Ist a rational und b irrational, so sind $a+b$, $\frac{1}{b}$ und (falls $a \neq 0$ ist) $a\cdot b$ irrational. Derartige Sätze können als bekannter Sachverhalt zitiert werden.

<u>330946 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

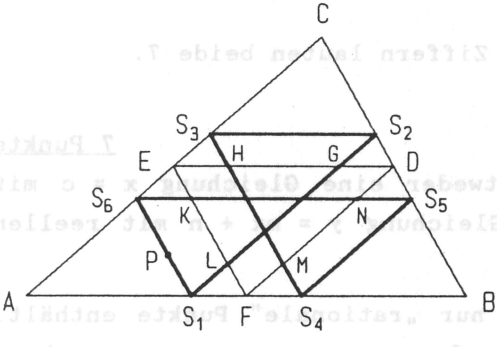

Abb.L 330946

Die Mittelpunkte der Seiten BC, CA und AB seien D, E bzw. F. Der Punkt S_1 liegt entweder auf AF (einschließlich F) oder auf FB; im letztgenannten Fall liegt S_2 auf BD. Daher genügt es (nach eventuellem Ändern der Bezeichnungen), nur den erstgenannten Fall zugrundezulegen und für ihn zu beweisen, daß ein $k > 1$ auf $S_k = S_1$ führen muß.

Ist $S_1 = F$, so erhält man, da bekanntlich $EF \parallel CB$, $FD \parallel AC$ und $DE \parallel BA$ ist, $S_2 = D$, $S_3 = E$ und damit $S_4 = F = S_1$.

Sei nun S_1 zwischen A und F gelegen. Die Schnittpunkte von DE, EF und FD mit S_1S_2 , S_3S_4 und S_5S_6 seien wie in Abb.L 330946 mit G,H, K,L,M,N bezeichnet. Dann sind S_1FDG und $LFDS_2$ Parallelogramme, also ist $\overline{S_1F} = \overline{GD}$ und $\overline{FL} = \overline{DS_2}$. Damit und mit $\overline{\measuredangle S_1FL} = \overline{\measuredangle GDS_2}$ (Stufenwinkel) ergibt sich $\Delta S_1FL \cong \Delta GDS_2$ (Kongruenzsatz sws). In gleicher Weise folgen auch die weiteren Aussagen in

$$\Delta S_1FL \cong \Delta GDS_2 \cong \Delta EHS_3 \cong \Delta FS_4M \cong \Delta NS_5D \cong \Delta S_6KE .$$

Also ist $\overline{S_1F} = \overline{S_6K}$; hiernach und wegen $S_1F \parallel S_6K$ ist S_1FKS_6 ein Parallelogramm, folglich gilt $S_6S_1 \parallel KF \parallel CB$. Damit führt die Konstruktion der nächsten Parallele auf $S_7 = S_1$, wie zu zeigen war.

Bemerkung: Man kann auch beweisen: Ist P der Schwerpunkt S des Dreiecks ABC, so geht bereits die Parallele S_2S_3 durch P. Da jedoch nicht nach dem *kleinsten* n gefragt war, für das S_nS_{n+1} durch P geht, genügt der obige, ohne gesonderte Diskussion des Falles P = S geführte Beweis.
Ähnlich kann auch eine Lösungsdarstellung akzeptiert werden, bei der der Fall $S_1 = F$ dadurch den übrigen Lagemöglichkeiten subsumiert wird, daß man z.B. für Parallelogramme wie S_1FDG und Dreiecke wie S_1FL den Entartungsfall $\overline{S_1F} = 0$ zuläßt. (Daß das Auftreten solcher Entartungen berücksichtigt wurde, sollte dann allerdings aus dem Lösungstext hervorgehen.)

Vorschläge zur Punktverteilung:

330944

Schluß auf (1) und (2) (oder entsprechend weiterführende Aussagen) 3
Herleitung von x = 7 und y = 7 (2 Pkte. + 1 Pkt.) 3
6

330945

a) Nichtexistenz von Geraden nur mit „rationalen" oder nur mit „irrationalen" Punkten 1
Nichtexistenz von Geraden nur mit „gemischten" Punkten 2
b) Existenz jeweils einer Geraden mit Punkten aus genau zwei der drei Sorten
für eine Zusammenstellung zweier Sorten, ... 1
für die beiden anderen Zusammenstellungen 1
c) Existenz einer Geraden mit (mindestens) je einem Punkt aus jeder Sorte 2
7

330946

Nachweis für Punkte mit $S_1 = F$ (ggf.im Folgenden mit erfaßt) .. 2

Nachweis für andere Punkte:
Weitere Fallunterscheidung (oder -berücksichtigung) 1
Weitere verwendbare Schlüsse (z.B. Kongruenz, Parallelität) 3
Abschließender Nachweis, daß P erreicht wird 1
7