Olympiaklassen 11 – 13

321241

Von den Eckpunkten eines regelmäßigen 250-Ecks wurden genau 16 gelb und alle anderen blau gefärbt.
Beweisen Sie, daß es zu jeder solchen Färbung eine Drehung des 250-Ecks um seinen Mittelpunkt gibt, bei der alle gelben Ecken in blaue übergehen!

321242

Man beweise, daß ein Würfel für jede natürliche Zahl $n \geq 100$ in genau n Würfel zerlegt werden kann.

321243

Von 1993 Punkten $P_1, \ldots, P_{1993}$ werde vorausgesetzt, daß keine drei P_i, P_j, P_k von ihnen ($i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$) einer gemeinsamen Geraden angehören.
Ferner sei für gewisse Paare (i, j) mit $1 \geq i < j \geq 1993$ jeweils die Strecke P_iP_j konstruiert; dabei werde vorausgesetzt, daß jeder der 1993 Punkte P_i mit mindestens 1661 anderen dieser 1993 Punkte durch eine der konstruierten Strecken verbunden ist.
Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Unter den P_i gibt es 7 Punkte, von denen jeder mit jedem anderen dieser 7 Punkte durch eine der konstruierten Strecke verbunden ist.

321244

Man beweise: Wenn reelle Zahlen a, b, c das Gleichungssystem

$$a + b + c = 2,$$
$$ab + ac + bc = 1$$

erfüllen, so gilt

$$0 \leq a \leq \frac{4}{3}, 0 \leq b \leq \frac{4}{3}, 0 \leq c \leq \frac{4}{3}.$$

321245

Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen und mit dem Umfang 1993, unter denen sich keine zwei untereinander kongruenten Dreiecke befinden.

Von den nachstehenden Aufgaben 3212464A und 321246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

321246A

Eine Bus-Bahn-Rundreise durch n Städte sei eine Reise, die in einer dieser Städte beginnt, jede andere von ihnen genau einmal erreicht, dann zum Ausgangspunkt zurückführt und insgesamt keine anderen Verkehrsmittel als Bus oder Bahn benutzt. Von n Städten $S_1, \ldots, S_n$ werde vorausgesetzt, daß zwischen zwei von ihnen genau eine (in beiden Richtungen nutzbare) Verbindung besteht und daß diese jeweils nur entweder eine Bus- oder eine Bahnverbindung ist.
Man beweise für jede natürliche Zahl $n \geq 3$, daß es durch n Städte, die diese Voraussetzungen erfüllen, stets eine Bus-Bahn-Rundreise geben muß, bei der das Verkehrsmittel höchstens einmal gewechselt wird.

321246B

Eine Funktion f erfülle folgende Voraussetzungen: f ist für alle reellen Zahlen x definiert und stetig, alle Funktionswerte f(x) sind reelle Zahlen, und für jedes reelle x gilt $f(f(f(x)))=x$.
Man beweise: Diese Voraussetzungen werden nur von derjenigen Funktion f erfüllt, die für alle reellen x durch $f(x)=x$ definiert ist.

mathematik lehren / Heft 59 S. 40 ff
= alpha 4/93 S. 30 ff

321241 Lösung: 6 Punkte

Für jede gelbe Ecke P seien diejenigen von der identischen Abbildung verschiedenen Drehungen d um den Mittelpunkt M des 250-Ecks aufgezählt, die diese Ecke P in eine ebenfalls gelbe Ecke d(P) überführen. Wird jede Drehung, die in diesen Aufzählungen vorkommt, insgesamt nur einmal berücksichtigt (auch wenn sie mehrere gelbe Ecken P,Q,... in gelbe d(P),d(Q),.... überführt), so folgt: Da es für jede gelbe Ecke nur 15 solche Drehungen gibt, kann es höchstens $16 \cdot 15 = 240$ von der identischen Abbildung verschiedene Drehungen um M geben, bei denen je mindestens eine gelbe Ecke in eine gelbe übergeht.

Es gibt aber insgesamt 249 von der identischen Abbildung verschiedene Drehungen um M, die alle Ecken in Ecken überführen. Also muß es unter diesen 249 Drehungen auch (mindestens 9) solche geben, bei denen jede gelbe Ecke in eine blaue übergeht.

321242 Lösung: 7 Punkte

I. Ein Würfel einer Kantenlänge a kann in 8 Würfel der Kantenlänge $\frac{a}{2}$ zerlegt werden. Die Anzahl der Würfel hat sich dabei um $8-1 = 7$ vergrößert.
Weiter kann man einen der erhaltenen Würfel wieder in 8 Würfel (der Kantenlänge $\frac{a}{4}$) zerlegen; insgesamt hat sich die Anzahl der Würfel damit um $2 \cdot 7$ vergrößert.
So fortfahrend erhält man zu jeder natürlichen Zahl p die Aussage: Durch derartiges Zerlegen kann die Anzahl der Würfel um $p \cdot 7$ vergrößert werden.

II. Ferner gilt: Ein Würfel einer Kantenlänge a kann in 27 Würfel der Kantenlänge $\frac{a}{3}$ zerlegt werden, und von diesen kann man dann wieder 8 zu einem Würfel der Kantenlänge $\frac{2a}{3}$ zusammenfassen. Damit hat sich die Anzahl der Würfel um $27-8 = 19$ vergrößert. Auch dieses Verfahren kann wiederholt werden; somit erhält man zu jeder natürlichen Zahl q auch die Aussage: Die Anzahl der Würfel kann um $q \cdot 19$ vergrößert werden.

III. In gleicher Weise folgt durch Zerlegen eines Würfels in 64 Würfel, von denen man dann wieder 27 zusammenfaßt: Die Anzahl der Würfel kann um $64-27 = 37$ vergrößert werden.

Nach I.,II.,III. folgt (z.B.) aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
1 + 6\cdot 7 + 3\cdot 19 &= 100\,,\\
1 + 9\cdot 7 + 37 &= 101\,,\\
1 + 9\cdot 7 + 2\cdot 19 &= 102\,,\\
1 + 1\cdot 7 + 5\cdot 19 &= 103\,,\\
1 + 12\cdot 7 + 1\cdot 19 &= 104\,,\\
1 + 4\cdot 7 + 4\cdot 19 &= 105\,,\\
1 + 15\cdot 7 &= 106\,,
\end{aligned}$$

daß ein Würfel für jede der Zahlen $n = 100,101,\ldots,106$ in genau n Würfel zerlegt werden kann. Nochmals nach I. gilt daher mit jeder natürlichen Zahl p, daß auch für jede der Zahlen

$$n = 100 + p\cdot 7\,,\quad n = 101 + p\cdot 7\,,\ldots,\quad n = 106 + p\cdot 7 \qquad (*)$$

ein Würfel in genau n Würfel zerlegt werden kann.

Da jede natürliche Zahl $n \geq 100$ von einer der Formen (*) mit natürlichem p ist, ist hiermit der geforderte Beweis erbracht.

321243 Lösung: 7 Punkte

Die Existenz von 7 Punkten $Q_1, \ldots, Q_7$ der geforderten Art kann folgendermaßen nachgewiesen werden:

Als Q_1 werde ein beliebiger der Punkte $P_1, \ldots, P_{1993}$ gewählt. Wenn für ein k mit $1 \leq k \leq 6$ bereits Punkte $Q_1, \ldots, Q_k$ gewählt werden konnten, von denen (im Fall $k > 1$) jeder mit jedem anderen durch eine konstruierte Strecke verbunden ist, so wird nun die Existenz eines Punktes Q_{k+1} gezeigt, der mit allen Q_j $(j=1,\ldots,k)$ durch je eine konstruierte Strecke verbunden ist.

Es sei nämlich V_i $(i = 1,\ldots,k)$ jeweils die Menge aller derjenigen Punkte, die mit Q_i durch eine konstruierte Strecke verbunden sind, und es sei

$$D_0 = \{P_1, \ldots, P_{1993}\},$$

$$D_i = D_{i-1} \cap V_i \qquad (i = 1,\ldots,k). \tag{1}$$

Damit gilt[1)]

$$\begin{aligned} |D_i| &= |D_{i-1}| + |V_i| - |D_{i-1} \cup V_i| \\ &\geq |D_{i-1}| + |V_i| - |\{P_1, \ldots, P_{1993}\}| \\ &\geq |D_{i-1}| + 1661 - 1993 \qquad (i = 1,\ldots,k), \end{aligned}$$

woraus der Reihe nach für $i = 0,\ldots,k$

$$|D_i| \geq 1993 - i \cdot 332$$

folgt. Wegen $k \leq 6$ ist insbesondere $|D_k| \geq 1993 - 6 \cdot 332 = 1$, also D_k nicht leer; daher existiert ein Punkt $Q_{k+1} \in D_k$. Für jedes j mit $1 \leq j \leq k$ folgt dann aus (1) auch

$$D_k \subseteq \cdots \subseteq D_j \subseteq V_j,$$

also ist Q_{k+1} mit jedem Q_j $(1 \leq j \leq k)$ durch eine konstruierte Strecke verbunden.

Bemerkung: Anstelle der hier gewählten Ausdrucksweise mit Mengenformeln und „ineinandergeschachtelter" Induktion können auch mehr verbale und mehr aufzählende Formulierungen gewählt werden. Dabei ist freilich zu prüfen, ob z.B. bei Verwendung einer Ausdrucksweise mit „usw.", „entsprechend gilt ..." die einzuschlagenden Teilschritte hinreichend aus der Darstellung hervorgehen.

---

1) Mit der Bezeichnung $|M|$ für die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M wird die Gleichung $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ als bekannter Sachverhalt herangezogen (oder sie kann z.B. darauf zurückgeführt werden, daß sich bei disjunkter Zerlegung von $A \cup B$ in $A \setminus B$, $B \setminus A$ und $A \cap B$ mit e, f bzw. d Elementen $|A| = e+d$, $|B| = f+d$ und $|A \cup B| = e+f+d$ ergibt.)

Vorschläge zur Punktverteilung

311241

Verwendbares Einstiegsmotiv, z.B. Drehungen, die (mindestens) einen gelben Punkt auf einen gelben abbilden 2

Weiterführung (z.B. Anzahlabschätzung dieser Drehungen) 2

Nutzung zum abschließenden Existenznachweis 2

6

311242

Vorbereitende Aussagen (z.B. mögliche Vergrößerung der Würfelzahl um 7, 19, 37) 3

Ermittlung spezieller und für weitere Beweisschritte nutzbarer Würfelzahlen (z.B. 100,...,106) 2

Abschließender Nachweis für alle $n \geq 100$ 2

7

311243

Zum Beweis nutzbare Teilschritte (z.B. Einführung der D_i (Menge der zu einem i-ten Erweiterungsschritt verwendbaren Punkte), Abschätzung $|D_i| \geq |D_{i-1}| - 332$) 4

Abschließender Existenznachweis 3

7

321244 Lösung: 6 Punkte

Setzt man aus der ersten Gleichung $c = 2-a-b$ in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich $ab + (a+b)(2-a-b) = 1$,

also $$b^2 + (a-2)b + a^2-2a+1 = 0 .$$

Da diese quadratische Gleichung von der reellen Zahl b erfüllt wird, also eine nicht negative Diskriminante hat (oder: indem man die Gleichung in der Gestalt $\left(b + \frac{a-2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a-2)^2 - (a^2-2a+1)$ schreibt), ergibt sich

$$(a-2)^2 - 4(a^2-2a+1) \geq 0 ,$$
$$-3a^2 + 4a \geq 0 ,$$
$$4a \geq 3a^2 \geq 0 .$$

Daher gilt entweder $a = 0$
oder $a > 0$ und dann $4 \geq 3a$, also $a \leq \frac{4}{3}$.

Damit ist $0 \leq a \leq \frac{4}{3}$ gezeigt. Entsprechend folgen die beiden anderen Behauptungen.

2.Lösungsmöglichkeit: Aus den vorausgesetzten Gleichungen folgt

$$ab = 1 - (a+b)c = 1 - (2-c)c = (1-c)^2 \geq 0$$

und analog $ac \geq 0$. Hieraus und aus $a^2 \geq 0$ folgt

$$a = \frac{1}{2}a\cdot 2 = \frac{1}{2}a\cdot(a+b+c) = \frac{1}{2}(a^2+ab+ac) \geq 0 .$$

Entsprechend leitet man $b \geq 0$, $c \geq 0$ her.

Ferner folgt: Für die Größen $u = \frac{4}{3} - a$, $v = \frac{4}{3} - b$, $w = \frac{4}{3} - c$ gilt

$$u + v + w = 4 - (a+b+c) = 4 - 2 = 2, \qquad (1)$$

$$9uv = 16-12(a+b)+9ab, \quad 9uw = 16-12(a+c)+9ac, \quad 9vw = 16-12(b+c)+9bc,$$

$$uv+uw+vw = \frac{1}{9}\big(48-24(a+b+c)+9(ab+ac+bc)\big) = \frac{1}{9}(48-24\cdot 2+9\cdot 1) = 1. \qquad (2)$$

Ebenso wie $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ aus den vorausgesetzten Gleichungen folgt, erhält man daher aus (1),(2) die Ungleichungen $u \geq 0$, $v \geq 0$, $w \geq 0$, d.h. $a \leq \frac{4}{3}$, $b \leq \frac{4}{3}$, $c \leq \frac{4}{3}$.

321245 Lösung: 7 Punkte

I. Positive ganze Zahlen x,y,z sind genau dann Seitenlängen eines Dreiecks mit dem Umfang 1993, wenn sie die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1993 , \\ x + y &> z , \\ x + z &> y , \\ y + z &> x \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

erfüllen. Diese Bedingungen sind äquivalent mit

$$\left.\begin{aligned} z &= 1993 - x - y , \\ x + y &> 1993 - x - y , \\ 1993 - y &> y , \\ 1993 - x &> x ; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

dies wegen der Ganzzahligkeit damit, daß $z = 1993 - x - y$ und

$$x + y > 996 \ , \quad y \leq 996 \ , \quad x \leq 996 \qquad (3)$$

gilt. Zu jedem Paar $(x;y)$ positiver ganzer Zahlen, die (3) erfüllen, ist auch das eindeutig zugehörige $z = 1993 - x - y$ eine positive ganze Zahl. Daher kann man die positiv-ganzzahligen Tripel $(x;y;z)$ mit (1) z.B. der folgenden Aufzählung der Paare $(x;y)$ mit (3) entnehmen:

x	y
1	996
2	996 , 995
⋮	⋮ ⋮ ⋱
995	996 , 995 ,..., 2
996	996 , 995 ,..., 2 , 1

Die Anzahl der (Paare mit (3) bzw.) Tripel mit (1) ist demnach

$$1 + 2 + \cdots + 996 = \frac{997 \cdot 996}{2} = 997 \cdot 498 \ .$$

II. Unter diesen Tripeln ist jeweils von solchen, die zu kongruenten Dreiecken führen, genau eines beizubehalten. Kongruente Dreiecke ergeben sich genau dann, wenn sich Tripel nur in der Reihenfolge unterscheiden. Die Anzahl solcher Tripel hängt davon ab, wieviele der Zahlen x,y,z eines Tripels einander gleich sind.

Die Bedingung $x = y$ ist zusammen mit (3) äquivalent zu

$$498 < x = y \leq 996 \ ;$$

somit gilt dies für genau 498 Tripel. Die Bedingungen (1) gehen bei jeder Änderung der Reihenfolge von x,y,z in sich über; also gibt es ebenfalls je genau 498 Tripel mit $x = z$ bzw. mit $y = z$. In keinem der ermittelten Tripel gilt $x = y = z$, da dies auf die Gleichung $3x = 1993$ führen würde, die nicht ganzzahlig lösbar ist. Also sind insgesamt in genau $3 \cdot 498$ Tripeln jeweils genau zwei Zahlen einander gleich.

Aus diesen Tripeln ist von je drei der Form $(a;a;b),(a;b;a),(b;a;a)$ mit $a \neq b$ genau eines beizubehalten; aus den übrigen ($997 \cdot 498 - 3 \cdot 498 =$) $994 \cdot 498$ Tripeln ist von je sechs der Form $(a;b;c),(a;c;b),(b;a;c),(b;c;a),(c;a;b),(c;b;a)$ mit $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ genau eines beizubehalten.

Damit ist die gesuchte Anzahl ermittelt; sie beträgt

$$\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 498 + \frac{1}{6} \cdot 994 \cdot 498 = 498 + 994 \cdot 83 = 83000 \ .$$

Zu <u>anderen Lösungswegen</u> kann man durch andere Vorgehensweisen des Abzählens kommen, z.B. indem man zu (1) die Bedingung $x \leq y \leq z$ hinzufügt und jedes hierfür ermittelte Tripel genau einmal berücksichtigt. Nach Einführung etwa von $p = y - x$ und $q = z - y$ hat man alle ganzzahligen x,q zu ermitteln, die $0 \leq q < x \leq 1993/3$ und ($2p =$) $1993 - 3x - q \geq 0$ erfüllen. Zu $x = 1,2;3,4;...;497,498$ findet man der Reihe nach $1,1;2,2;...;249,249$ ganzzahlige $q \geq 0$ mit geradzahligen $2p \geq 0$; zu $x = 499,500;501,502;...;661,662;663,664$ dagegen der Reihe nach $249,247;246,244;...;6,4;3,1$ solche q.

Man kann auch (zunächst beweisen oder) als bekannten Sachverhalt verwenden, daß die Tripel $(x;y;z)$ positiver x,y,z mit $x+y+z = 1993$ eineindeutig den Punkten P im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Höhenlänge 1993 entsprechen, wenn nämlich x,y,z die Abstände von P zu den Dreiecksseiten sind. Die Dreiecksungleichung schränkt dann P auf das Innere des Mittendreiecks DEF von ABC ein.

Die Forderung, von Tripeln, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, jeweils nur eines zu berücksichtigen, bedeutet: Von Punkten in DEF, die durch Symmetrieoperationen von DEF ineinander übergehen, ist jeweils nur einer zu berücksichtigen. Mit den Anzahlen g bzw. h bzw. s der inneren Punkte von DEF, die ganzzahlige x,y,z haben bzw. außerdem auf einer Höhe des Dreiecks DEF bzw. auf seinem Schwerpunkt liegen, gilt dann $g = 1+2+\cdots+996$, $h = 3\cdot 498$, $s = 0$, und die gesuchte Anzahl ist $(g-h)/6 + (h-s)/3 + s$.

<u>321246A Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Ist $P_1\cdots P_k$ (für ein k mit $2 \leq k \leq n+1$) eine (Teil-)Reise, in der jedes P_i $(i = 1,\ldots,k)$ eine der Städte $S_1,\ldots,S_n$ ist, so heiße diese Reise genau dann *zulässig*, wenn sie entweder jede der Städte $P_1,\ldots,P_k$ genau einmal berührt oder eine *vollständige Rundreise* ist, d.h. $P_1\cdots P_nP_1$ lautet, worin die Teilreise $P_1\cdots P_n$ jede der Städte $S_1,\ldots,S_n$ genau einmal berührt. Eine (Teil-)Reise $P_1\cdots P_k$ heiße genau dann „gut", wenn sie zulässig ist und höchstens einen Wechsel des Verkehrsmitels enthält.

Es genügt, die folgende Aussage zu beweisen: *Zu jeder „guten" Reise* $P_1\cdots P_k$ *, die keine vollständige Rundreise ist* (woraus insbesondere $k \leq n$ folgt), *gibt es eine längere „gute" Reise.*

Enthält $P_1\cdots P_k$ sogar *keinen* Wechsel des Verkehrsmittels, so ist jede zulässige Reise der Form $P_1\cdots P_kS_j$ (wegen $k \leq n$ existiert eine solche) länger als $P_1\cdots P_k$ und „gut". Enthalte nun $P_1\cdots P_k$ *(genau) einen* Wechsel des Verkehrsmittels; d.h., für ein m mit $1 < m < k$ werde $P_1\cdots P_m$ mit einem Verkehrsmittel v und $P_m\cdots P_k$ mit dem anderen Verkehrsmittel w zurückgelegt.

Im Fall $k = n$ ist, je nachdem, ob w oder v das Verkehrsmittel der Strecke P_nP_1 ist, die Reise $P_1\cdots P_nP_1$ oder die Reise $P_nP_1\cdots P_n$ länger als $P_1\cdots P_n$ und „gut".

Im Fall $k < n$ sei S_j eine von $P_1, \ldots, P_k$ verschiedene Stadt. Entweder ist dann (mindestens) eine der längeren Reisen $P_1\cdots P_kS_j$, $S_jP_1\cdots P_k$ „gut", oder es gelten die beiden Aussagen: Auf P_kS_j verkehrt v, auf P_1S_j verkehrt w. Treffen diese beiden Aussagen zu, so auch nach Umkehrung der Reihenfolge $P_1\cdots P_m\cdots P_k$ und gleichzeitiger Vertauschung von v,w . Nötigenfalls durch diese Änderungen ist aber stets erreichbar, daß w auch das Verkehrsmittel der Strecke S_jP_m ist. Im Fall $m > 2$ ist dann die Reise $P_{m-1}\cdots P_1S_jP_m\cdots P_k$, im Fall $m = 2$ die Reise $P_1S_jP_m\cdots P_k$ länger als $P_1\cdots P_m\cdots P_k$ und „gut".

Damit ist der geforderte Beweis erbracht.

Bemerkung: Der Beweis kann auch als Beweis durch vollständige Induktion über die Anzahl n der Städte geführt werden. Dabei ist es möglich, eine Fallunterscheidung zu verwenden, die der obigen entspricht. Man kann dabei auch anstelle der obigen Bezeichnungen v,w die Möglichkeiten, sie als „Bus", „Bahn" zu deuten, einzeln aufzählen; und entsprechend kann man mit einzelner Fall-Aufzählung (anstelle der obigen Betrachtung „nötigenfalls" vorgenommener Änderungen) vorgehen.

321246B Lösung: 7 Punkte

Wenn eine Funktion f die genannten Voraussetzungen erfüllt, so kann man für sie die folgenden Aussagen herleiten:

I. Die Funktion f ist eineindeutig.

Beweis: Aus $f(r) = f(s)$
folgt stets $r = f(f(f(r))) = f(f(f(s))) = s$.

II. Die Funktion f ist monoton.

Beweis: Angenommen, f wäre nicht monoton. Dann gäbe es[1] drei reelle Zahlen r,s,t, für die

$$r < s < t$$

und entweder $f(r) < f(s)$, $f(s) > f(t)$
oder $f(r) > f(s)$, $f(s) < f(t)$

wäre. Hierzu gäbe es eine reelle Zahl y, für die

$$f(r) < y < f(s) \text{ und } f(s) > y > f(t)$$
bzw. $$f(r) > y > f(s) \text{ und } f(s) < y < f(t)$$

wäre. Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen würden damit auch reelle Zahlen x und x' existieren, für die

$$r < x < s < x' < t$$
und $$f(x) = f(x') = y$$

gelten würde. Das ist ein Widerspruch gegen die in I. gezeigte Eineindeutigkeit.

III. Die Funktion f ist streng monoton steigend.

Beweis: Nach I. und II. ist f streng monoton. Angenommen, f wäre streng monoton fallend. Dann könnte nicht $f(x) = x$ für alle x gelten, da dies eine nicht fallende Funktion definieren würde. Also gäbe es entweder ein x mit $x < f(x)$, oder es gäbe ein x mit $x > f(x)$. Wegen des streng monotonen Fallens folgte

---

[1] Dieser Schluß kann entweder als bekannter Sachverhalt über eineindeutige Funktionen zitiert oder z.B. so hergeleitet werden: Aus der Eineindeutigkeit sowie der Annahme, f wäre nicht monoton, folgt (nach Definition der Monotonie): Es müßte reelle Zahlen a,b,c,d mit $a < b$ und $c < d$ geben, für die
entweder $f(a) < f(b)$, $f(c) > f(d)$
oder $f(a) > f(b)$, $f(c) < f(d)$
wäre. Durch eventuelle Vertauschung von a,b mit c,d wäre $a \leq c$ erreichbar. In den dann verbleibenden Fällen $a < b \leq c < d$; $a \leq c < b \leq d$, $a \leq c < d < b$ könnte man durch weitere Diskussion von $f(b) \lessgtr f(c)$ bzw. von $f(a) \lessgtr f(c)$, $f(b) \lessgtr f(d)$ stets *unter den Zahlen* a,b,c,d drei oben verlangte r,s,t finden.

aus $x < f(x)$

der Reihe nach $f(x) > f(f(x))$,

$f(f(x)) < f(f(f(x))) = x$,

$x = f(f(f(x))) > f(x)$

und damit ein Widerspruch. Ebenso (mit vertauschten $>$, $<$) widerlegt man $x > f(x)$.

IV. Für alle reellen x gilt $f(x) = x$.

Beweis: Angenommen, es gäbe ein x mit $x < f(x)$ oder $x > f(x)$. Wegen des in III. gezeigten streng monotonen Steigens folgte aus $x < f(x)$

der Reihe nach $f(x) < f(f(x))$,

$f(f(x)) < f(f(f(x))) = x$

und damit ein Widerspruch. Ebenso widerlegt man $x > f(x)$.

Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Vorschläge zur Punktverteilung

311244

Vorbereitende Herleitung (z.B. einer quadratischen Ungleichung oder (2.Lösungsweg:) $a,b,c \geq 0$) 3

Abschließende Herleitung 3

6

311245

Bedingungen (z.B. (2) für Seitenzahlen x,y,z oder (für Differenzen p,q:) $0 \leq q < x \leq 1993/3$, $2p = 1993 - 3x - q \geq 0$) 2

Anzahl der Tripel mit (2) 2
Aussortieren kongruenter Dreiecke 3
Oder:Anzahlen von Werten q zu x = 1,...,664 3
Summation dieser Anzahlen 2
} 5

7

311246 A

Aufweis „guter" (Teil- oder Gesamt-)Reisen je nach Aufwand und Beitrag zum gesamten Beweis ... bis zu .. 5

Abschließende Beweisgestaltung .....etwa restliche .. 2

7

311246 B

Beweisschritt (etwa gleichwertig mit) I: 1

" " " " II: 3

" " " " III: 2

" " " " IV: 1

7