34. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Saison 1994/1995

Aufgaben und Lösungen

34. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340731 = 340941:
Albrecht soll eine natürliche Zahl zwischen 1 und 1 000 000 ermitteln. Dirk, Evelyn und Franziska machen dazu jeweils genau eine wahre und eine falsche Aussage (in welcher Reihenfolge, wird nicht dazu gesagt):

Dirk:
(1) Die gesuchte Zahl hat weniger als drei Dezimalstellen.
(2) Zerlegt man die gesuchte Zahl in Primfaktoren, so kommen in dieser Zerlegung genau zwei voneinander verschiedene Primzahlen vor, jede (mindestens einmal, aber) möglicherweise auch mehrmals.

Evelyn:
(1) Die gesuchte Zahl ist durch 9 teilbar.
(2) Die gesuchte Zahl ist nicht durch 27 teilbar.

Franziska:
(1) Die gesuchte Zahl lautet 91 809.
(2) Die gesuchte Zahl ist durch 101 teilbar.

Zeige, daß die gesuchte Zahl auf diese Weise eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Zahl!

Aufgabe 340732:
Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... usw. bis 100 derart hintereinander aufgeschrieben, daß eine Zahl z der Form $z = 12345678910111213....9899100$ entsteht.

a) Wieviel Stellen hat z?

b) Es sollen 100 Ziffern der Zahl z so gestrichen werden, daß die mit den restlichen Ziffern dargestellt Zahl z' möglichst groß ist. Dabei soll die Reihenfolge der in z' verbleibenden Ziffern von z nicht geändert werden.

   Ermittle, welche Ziffern zu streichen sind, und gib die ersten 10 Ziffern der neuen Zahl z' an!

Aufgabe 340733:
Ist ABC ein Dreieck, das nicht stumpfwinklig ist, so bezeichne D den Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe; E sei der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an AC, und F sei der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an BC.

a) Wie groß ist der Flächeninhalt und der Umfang des Fünfecks $ABFCE$, wenn $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$ und $\overline{CD} = 4\,\text{cm}$ vorausgesetzt wird.

b) Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle ACB$, wenn -anders als in a)- vorausgesetzt wird, daß es eine Gerade gibt, auf der die drei Punkte E, C und F liegen?

Beweise auch, daß aus dieser Voraussetzung folgt, daß das Viereck $ABFE$ ein Trapez ist!

Aufgabe 340734:

Ein Viereck heißt genau dann *konvex*, wenn alle seine Diagonalen ganz der Fläche des Vielecks angehören.

Wie viele Diagonalen hat ein konvexes 1995-Eck insgesamt? Begründe die von dir angegebene Anzahl!

Aufgabe 340735:

In einer Arbeitsgemeinschaft sprechen Alexandra und Daniel über Eigenschaften von Würfeln.

Alexandra sagt: "Für je drei Seitenflächen eines Würfels, die eine gemeinsame Ecke haben, gilt: Die Mittelpunkte dieser drei Seitenflächen sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks."

Daniel sagt: "Für je drei Seitenflächen eines Würfels, die keine gemeinsame Ecke haben, gilt: Die Mittelpunkte dieser drei Seitenflächen sind die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks."

Beweise, daß beide Aussagen wahr sind!

Aufgabe 340736:

Jemand konstruiert ein Quadrat $ABCD$ mit der Diagonalenlänge $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$. Dann wählt er auf der Seite AB einen beliebigen Punkt E und konstruiert den Schnittpunkt F von BC mit der Parallelen durch E zu AC, den Schnittpunkt G von CD mit der Parallelen durch F zu BD sowie den Schnittpunkt H von AD mit der Parallelen durch G zu AC.

a) Beweise, daß jedes so zu konstruierende Viereck $EFGH$ ein Rechteck ist!

b) Ermittle für jedes so zu konstruierende Viereck den Umfang!

34. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 340731:

Wenn die Bedingungen der Aufgabe von einer natürlichen Zahl n erfüllt werden, so folgt:

Wäre Evelyns Aussage (2) falsch, also n durch 27 teilbar, so wäre n auch durch 9 teilbar, d.h. auch Evelyns Aussage (1) falsch. Das widerspricht den Bedingungen der Aufgabe. Also ist Evelyns Aussage (2) wahr und (nochmals nach den Bedingungen der Aufgabe) ihre Aussage (1) falsch. Das besagt: n ist durch 9, aber nicht durch 27 teilbar.

Wäre Franziskas Aussage (1) wahr, so wäre wegen $91\,809 : 101 = 909$ auch Franziskas Aussage (2) wahr. Wieder kann dies nach den Bedingungen der Aufgabe nicht sein, sondern es folgt: Aussage (1) ist falsch, Aussage (2) wahr, also lautet n nicht 91 809, ist aber durch 101 teilbar.

Damit ist gezeigt: Zerlegt man n in Primfaktoren, so kommt in dieser Zerlegung die Primzahl 3 genau zweimal und die Primzahl 101 mindestens einmal vor. Also ist n mindestens dreistellig und daher Dirks Aussage (1) falsch. Somit ist Dirks Aussage (2) wahr. Außer den Primzahlen 3 und 101 kommt bei der Zerlegung von n in Primfaktoren daher keine weitere Primzahl vor. Käme 101 genau zweimal vor, so wäre $n = 3^2 \cdot 101^2 = 91\,809$, was bereits widerlegt ist; käme 101 mehr als zweimal vor, so wäre $n \geq 3^2 \cdot 101^3 > 100^3$, also läge n nicht zwischen 1 und 1 000 000. Also kommt 101 genau einmal vor; es gilt $n = 3^2 \cdot 101 = 909$.

Somit ist die gesuchte Zahl durch die Bedingungen der Aufgabe eindeutig bestimmt, sie lautet 909.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340732:

a) Die Zahl r hat ihre Ziffern aus den 9 einstelligen Zahlen 1, ..., 9, den 90 zweistelligen Zahlen 10, ..., 99 und der dreistelligen Zahl 100. Also hat sie $9 + 90 \cdot 2 + 3 = 192$ Stellen.

b) Von den 192 Ziffern der Zahl z sollen in z' genau 92 Ziffern erhalten bleiben. Von zwei 92-stelligen Zahlen, die mit verschiedener Anzahl von Neunen beginnen, ist diejenige die größere, die mit der größeren Anzahl von Neunen beginnt.

   Vor der ersten in z auftretenden Neun stehen 8 von Neun verschiedene Ziffern, vor der zweiten weitere 19, vor der dritten, vierten und fünften wiederum je weitere 19 von Neun verschiedene Ziffern. Streicht man diese, so sind insgesamt bereits $8 + 4 \cdot 19 = 84$ Ziffern entfernt; aus der danach verbleibenden Zahl

   99999505152535455565758596 0 ... 9899100

   sind noch genau 16 Ziffern zu streichen.

   Das können nicht die 19 Ziffern bis zur ersten auf den Anfang 99999 folgenden Neun und auch nicht die 17 Ziffern bis zur ersten auf 99999 folgenden Acht sein. Von je zwei 92-stelligen Zahlen, die mit 99999 beginnen und an der sechsten Stelle verschiedene Ziffern haben, ist stets diejenige die größere, die an der sechsten Stelle die größere Ziffer hat. Die größte Möglichkeit hierfür ist somit, durch Streichen der ersten auf 99999 folgenden 15 Ziffern den Anfang 999997 zu erreichen. Danach ist noch genau eine Ziffer zu streichen.

Von den beiden Möglichkeiten, die auf den Anfang 999997 folgende Fünf zu streichen oder stehenzulassen (und eine später stehende Ziffer zu streichen), liefert das Streichen der Fünf die größere Zahl.

Damit ist gefunden, welche 100 Ziffern aus z zu streichen sind, um eine möglichst große Zahl z' zu erhalten. Die ersten zehn Ziffern dieser Zahl lauten 9999978596.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340733:

(a) Da bei Spiegelung jeder Punkt der Geraden, an der gespiegelt wird, fest bleibt und jedes Dreieck in ein kongruentes Dreieck übergeht, gilt $\Delta ACE \cong \Delta ACD$ und $\Delta BCF \cong \Delta BCD$ (siehe Abbildung a).

Daher ist der Flächeninhalt von $ABFCE$ doppelt so groß wie der von ABC. Dieser beträgt nach Voraussetzung $\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 14\,\text{cm}^2$, also hat $ABFCE$ den Flächeninhalt $28\,\text{cm}^2$.

Ferner folgt $\overline{AE} = \overline{AD}$ und $\overline{BF} = \overline{BD}$, also $\overline{AE} + \overline{BF} = \overline{AB}$, sowie $\overline{CE} = \overline{CF} = \overline{CD}$. Damit ergibt sich für den Umfang von $ABFCE$ der Wert $2 \cdot \overline{AB} + 2\overline{CD} = 22\,\text{cm}$.

(b) Mit den Bezeichnungen $\overline{\sphericalangle BAC} = \alpha$ und $\overline{\sphericalangle ABC} = \beta$ gilt nach dem Innenwinkelsatz für die Dreiecke ADC und BDC sowie wegen der Spiegelungen $\overline{\sphericalangle ACE} = \overline{\sphericalangle ACD} = 90° - \alpha$ und $\overline{\sphericalangle BCF} = \overline{\sphericalangle BCD} = 90° - \beta$.

Für $\overline{\sphericalangle ACB} = \gamma$ gilt wegen der Voraussetzung $\overline{\sphericalangle ECF} = 180°$ (siehe Abbildung b) daher

$$90° - \alpha + \gamma + 90° - \beta = 180°.$$

Wegen $180° - \alpha - \beta = \gamma$ (Innenwinkelsatz für das Dreieck ABC) folgt $2\gamma = 180°$, also $\gamma = 90°$.

Ferner sind wegen $\Delta ACE \cong \Delta ACD$ und $\Delta BCF \cong \Delta BCD$, also $\overline{\sphericalangle AEC} = \overline{\sphericalangle BFC} = 90°$ die Strecken AE und BF beide auf EF senkrecht und somit zueinander parallel. Damit ist $ABFE$ als Trapez nachgewiesen.

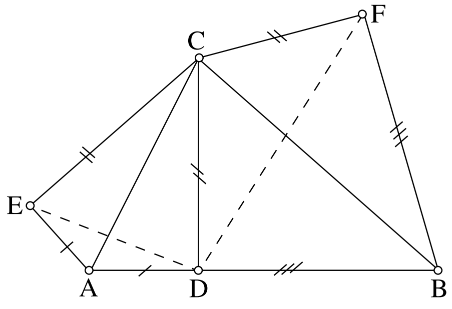


Abbildung a

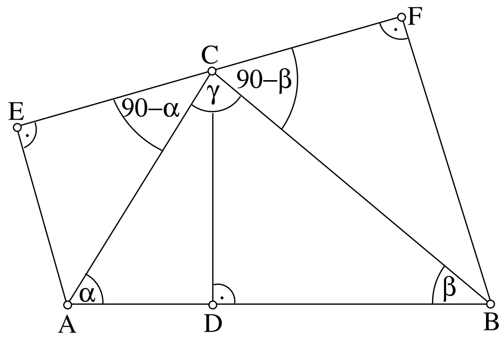


Abbildung b

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340734:

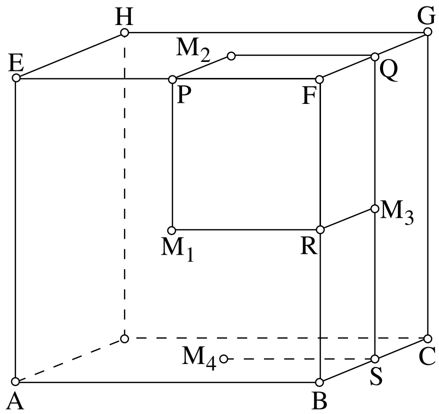
Man kann für jeden der 1 995 Eckpunkte des 1 995-Ecks die Verbindungsstrecke zu jedem der 1 994 anderen Eckpunkte betrachten. Damit hat man jede der insgesamt vorhandenen Verbindungsstrecken zwischen je zwei Eckpunkten genau zweimal betrachtet. Also gibt es genau $1\,995 \cdot 1\,994 : 2 = 1995 \cdot 997$ solche Verbindungsstrecken. Von ihnen sind genau 1 995 keine Diagonalen, sondern Seiten des 1 995-Ecks.

Die Anzahl der Diagonalen beträgt folglich $1\,995 \cdot 997 - 1\,995 = 1\,995 \cdot 996 = 1\,987\,020$.

Hinweis zur Korrektur: Das alleinige Zitieren einer (möglicherweise aus dem Unterricht oder aus außerunterrichtlicher Arbeit bekannten) Formel für die Anzahl der Diagonalen eines n-Ecks kann bei dieser Aufgabe nicht als ausreichend gewertet werden, da im Aufgabentext ausdrücklich eine Begründung verlangt wurde. Eine ausformulierte Begründung dafür, daß jedes 1 995-Eck genau 1 995 Seiten hat, wird dagegen nicht vom Schüler verlangt. Als akzeptabel kann auch gelten, wenn (in einem anderen Lösungsweg) mit dem Motiv des schrittweisen Erhöhens der Eckenzahl die Diagonalenzahl $2 + 3 + ... + 1993$ hergeleitet wird und danach ein Hilfsmittel zur Auswertung dieser Summe (Summenformel, Umordnung der Summanden o.a.) als bekannter Sachverhalt zitiert wird.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340735:



Für jede Seitenfläche eines Würfels der Kantenlänge a gilt (wie etwa mit den Bezeichnungen der Seitenfläche $ABFE$ in der Abbildung ausgedrückt sei): Die Verbindungsstrecke des Quadratmittelpunktes M_1 mit dem Mittelpunkt P der Strecke EF ist parallel zu BF, also senkrecht auf allen Geraden in der Ebene des Quadrates $EFGH$, und es gilt $\overline{M_1P} = \frac{a}{2}$.

Wendet man auch die entsprechenden Aussagen für M_2P an, so folgt: Das Dreieck M_1PM_2, ist mit $\overline{M_1P} = \overline{M_2P} = \frac{a}{2}$ gleichschenklig und bei P rechtwinklig. Entsprechendes gilt für die Dreiecke M_1RM_3 und M_2QM_3.

Daraus folgt Alexandras Aussage $\overline{M_1M_2} = \overline{M_1M_3} = \overline{M_2M_3}$.

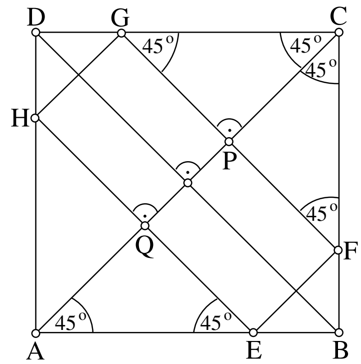
Ferner folgt $\overline{\sphericalangle M_2M_3Q} = \overline{\sphericalangle M_4M_3S} = 45°$ und damit Daniels Aussage $\overline{\sphericalangle M_2M_3M_4} = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$.

Bemerkung: Es gibt mehrere Lösungsvarianten, z.B. unter Nutzung der Rechteckeigenschaften von SQM_2M_4, der Eigenschaften des Würfelmittelpunktes (des Schnittpunktes der Körperdiagonalen), unter Anwendung des Thalessatzes, der Umkehrung des Satzes von Pythagoras u.s.w. Dabei kann das Zitieren von Würfeleigenschaften als bekannter Sachverhalt etwa in gleichem Ausmaß wie bei obiger Beweisvariante akzeptiert werden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340736:

a) Da die Diagonalen des Quadrates aufeinander senkrecht stehen, gilt wegen $FG \parallel BD$ auch $FG \perp AC$ (siehe Abbildung).



Da die Diagonalen die Innenwinkel des Quadrates halbieren, gilt für den Schnittpunkt P von FG mit AC ferner $\overline{\sphericalangle FCP} = \overline{\sphericalangle GCP}$.

Damit folgt nach dem Kongruenzsatz sww, daß $\Delta FCP \cong \Delta GCP$, also $\overline{FC} = \overline{GC}$ gilt.

Wegen $\overline{BC} = \overline{DC}$ folgt dann auch $\overline{BF} = \overline{DG}$. Damit und mit entsprechenden Schlußfolgerungen aus $EF \parallel AC$ und $HG \parallel AC$ erhält man $\overline{EB} = \overline{BF} = \overline{HD} = \overline{DG}$;

hiernach und wegen $\overline{\sphericalangle EBF} = \overline{\sphericalangle HDG} = 90°$ ist $\Delta EBF \cong \Delta HDG$, also $\overline{EF} = \overline{HG}$.

Also sind im Viereck $EFGH$ die Seiten EF und HG einander gleichlang und parallel, daher ist es ein Parallelogramm. Da außerdem FG auf AC und damit auch auf EF senkrecht steht, ist $EFGH$ als Rechteck nachgewiesen. $\square$

b) Für den Schnittpunkt Q von EH mit AC ist wegen $EF \parallel AC$ auch $EFPQ$ ein Rechteck, also gilt $\overline{EF} = \overline{QP}$ und $\overline{EQ} = \overline{FP}$. Damit und mit $\overline{\sphericalangle AQE} = \overline{\sphericalangle CPF} = \overline{\sphericalangle CPG} = 90°$ sowie $\overline{\sphericalangle AEQ} = \overline{\sphericalangle CFP} = \overline{\sphericalangle CGP} = 45°$ erweisen sich AEQ, CFP und CGP als zueinander kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, und es ergibt sich $\overline{AQ} = \overline{CP} = \overline{FP} = \overline{GP}$.

Insgesamt hat man nun $\overline{EF}+\overline{FP}+\overline{GP} = \overline{QP}+\overline{AQ}+\overline{CP} = \overline{AC}$; d.h., der halbe Umfang des Rechtecks $EFGH$ ist gleich der Länge von AC, der Umfang beträgt also für jedes derartige Rechteck 20 cm.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission