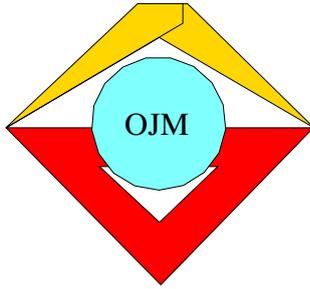




24. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Saison 1984/1985

Aufgaben und Lösungen





24. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 240621:

Drei Geschwisterpaare, jeweils ein Mädchen und ein Junge, sitzen bei der Geburtstagsfeier von Jörg, dem einen der drei Jungen, im Kreis um einen Tisch. Es ist folgendes bekannt:

- (1) Keines der sechs Kinder hat seinen Bruder oder seine Schwester als Tischnachbar.
- (2) Steffen sitzt dem ältesten der drei Jungen gegenüber.
- (3) Rechts von Agnes sitzt Ines, links von Agnes sitzt Michael.
- (4) Kerstin ist nicht Steffens Schwester.

Beweise, daß man aus diesen Angaben sowohl die zusammengehörenden Geschwisterpaare als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

Aufgabe 240622:

Die sechs Flächen eines Quaders mit den Kantenlängen $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm werden rot angestrichen. Danach wird der Quader in genau 60 Würfel von 1 cm Kantenlänge zersägt.

Wieviele der so entstehenden Würfel haben 0, 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 rot angestrichene Flächen? (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

Aufgabe 240623:

Drei Motorradfahrer Rainer, Jürgen und Frank fahren zur gleichen Zeit in Karl-Marx-Stadt an der gleichen Stelle ab; sie fahren auf der gleichen Straße in Richtung Leipzig.

Rainer legt mit seiner Maschine in je 10 Minuten eine Weglänge von 9 Kilometern zurück, Jürgen fährt in je 10 Minuten 8 Kilometer, Frank nur 6 Kilometer.

Wie groß sind nach einer Stunde die Weglängen zwischen Rainer und Jürgen, zwischen Rainer und Frank und zwischen Jürgen und Frank, wenn bis zu diesem Zeitpunkt jeder Fahrer seine Geschwindigkeit beibehalten hat?

Aufgabe 240624:

Rita experimentiert mit einer Balkenwaage. (Mit einer solchen Waage kann man feststellen, ob der Inhalt einer Waagschale soviel wiegt wie der Inhalt der anderen Waagschale oder welcher dieser beiden Inhalte mehr wiegt als der andere.)

Rita hat 17 Kugeln, 6 Würfel und 1 Pyramide. Sie stellt fest:

- (1) Jede Kugel wiegt soviel wie jede der anderen Kugeln.

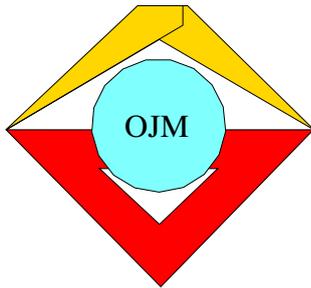


- (2) Jeder Würfel wiegt soviel wie jeder der anderen Würfel.
- (3) Die Pyramide und 5 Würfel wiegen zusammen soviel wie 14 Kugeln.
- (4) Ein Würfel und 8 Kugeln wiegen zusammen soviel wie die Pyramide.

Rolf fragt Rita, nachdem sie diese Feststellungen erhalten hat:

"Wieviele Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide?"

Beweise, daß man Rolfs Frage bereits eindeutig mit Hilfe der Feststellungen (1), (2), (3), (4) beantworten kann, ohne daß ein nochmaliges Wägen nötig ist! Wie lautet die Antwort?



24. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Lösung 240621:

Wegen (3) sitzen Michael (M), Agnes (a) und Ines (i) in der Reihenfolge nebeneinander, die in der Abbildung a) gezeigt wird. Wegen (2) sitzt Steffen (S) einem Jungen, also weder Ines noch Agnes gegenüber; damit verbleibt für ihn nach der Abbildung a) nur der Platz rechts neben Ines. Für Jörg (J) und Kerstin (k) sind nur die in der Abbildung a) noch freigelassenen Plätze möglich. Da sie einander benachbart sind, ist Kerstin nach (1) nicht Jörgs Schwester. Da sie nach (4) auch nichts Steffens Schwester ist, muß

Kerstin Michaels Schwester (*)

sein und sitzt wegen (1) nicht neben ihm. Wie Abbildung a) zeigt, ergibt sich damit die Sitzordnung in Abbildung b).

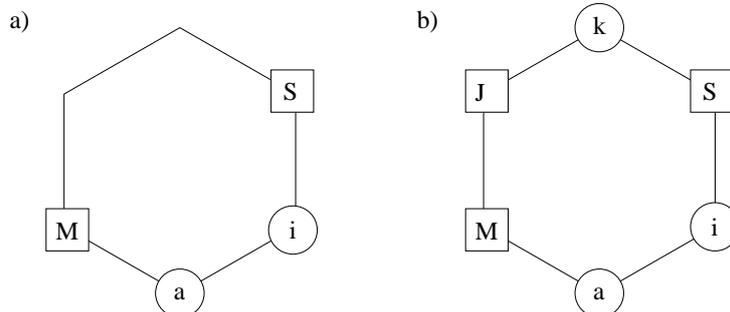
Weiter folgt aus Abbildung a) oder b): Ines ist wegen (1) nicht Steffens Schwester und nach (*) nicht Michaels Schwester. Also ist

Ines Jörgs Schwester, (**)

und als drittes zusammengehörendes Geschwisterpaar verbleiben

Agnes und Steffen. (***)

Damit ist bewiesen, daß man die zusammengehörenden Geschwisterpaare und die Sitzordnung eindeutig aus den Angaben ermitteln kann. Sie lauten wie in (*), (**), (***) bzw. Abbildung b) angegeben.



Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 240622:

Anzahl der Würfel mit 0 rot angestrichenen Flächen: 6

Anzahl der Würfel mit 1 rot angestrichenen Fläche: 22

Anzahl der Würfel mit 2 rot angestrichenen Flächen: 24



Anzahl der Würfel mit 3 rot angestrichenen Flächen: 8
Anzahl der Würfel mit 4 rot angestrichenen Flächen: 0
Anzahl der Würfel mit 5 rot angestrichenen Flächen: 0
Anzahl der Würfel mit 6 rot angestrichenen Flächen: 0

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 240623:

Da eine Stunde das Sechsfache von 10 Minuten ist, legt jeder Fahrer in einer Stunde das Sechsfache der von ihm in 10 Minuten gefahrenen Weglänge zurück. Daraus folgt:

Rainer fährt wegen $6 \cdot 9 = 54$ in einer Stunde 54 km,
Jürgen fährt wegen $6 \cdot 8 = 48$ in einer Stunde 48 km,
Frank fährt wegen $6 \cdot 6 = 36$ in einer Stunde 36 km.

Somit betragen nach einer Stunde wegen $54 - 48 = 6$ bzw. $54 - 36 = 18$ bzw. $48 - 36 = 12$ die Weglängen

zwischen Rainer und Jürgen 6 km,
zwischen Rainer und Frank 18 km,
zwischen Jürgen und Frank 12 km.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 240624:

Ist k , w bzw. p das Gewicht einer Kugel, eines Würfels bzw. der Pyramide, so folgt aus (1) und (2), daß jede Kugel das Gewicht k und jeder Würfel das Gewicht w hat. Aus (3) und (4) folgt ferner

$$p + 5w = 14k \tag{5}$$

$$w + 8k = p. \tag{6}$$

Wegen (6) besagt (5)

$$\begin{aligned} w + 8k + 5w &= 14k, \text{ also} \\ 6w &= 6k \text{ und folglich} \\ w &= k. \end{aligned}$$

Hiernach ergibt sich aus (6)

$$9k = p.$$

Damit ist bewiesen, dass man Rolfs Frage eindeutig mit Hilfe der Feststellungen (1), (2), (3), (4) beantworten kann. Die Antwort lautet: 9 Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)



Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission