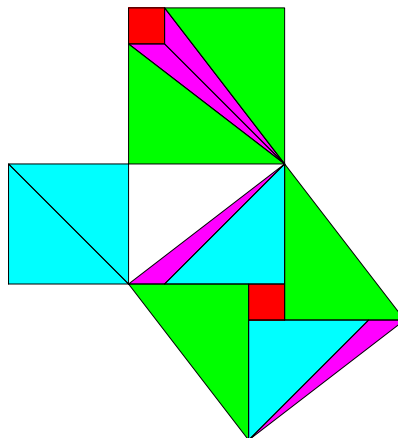




14. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1974/1975

Aufgaben und Lösungen





14. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 140931:

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl x (wobei x nicht unbedingt einstellig sein soll), die folgende Eigenschaft hat:

Die Zahl $83 \cdot x$ (das Produkt aus 83 und x) hat als Darstellung die Ziffernfolge $3x8$ (d.h., vor die Ziffer oder Ziffernfolge der Zahl x ist eine 3, hinter die so gebildete Ziffernfolge eine 8 zu setzen).

Aufgabe 140932:

Man gebe alle geordneten Quadrupel (a_1, a_2, a_3, a_4) aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4 mit $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ an, die folgender Bedingung genügen:

Die Summe der dritten Potenz der ersten beiden Zahlen des Quadrupels ist gleich der Differenz der dritten Potenz der letzten und vorletzten Zahl des Quadrupels.

Aufgabe 140933:

Von einem beliebigen Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ seien die Längen $a = \overline{AB}$, $c = \overline{CD}$ seiner Parallelseiten sowie der Abstand h der diese beide Parallelseiten enthaltenden Geraden gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S .

Man berechne aus den gegebenen Längen a, c, h die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, F_4 der Dreiecke ABS, BCS, CDS bzw. ADS .

Aufgabe 140934:

Man beweise, daß für beliebige reelle Zahlen x, y, z die folgende Beziehung gilt: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.

Ferner gebe man für x, y, z Bedingungen an, die gleichwertig damit sind, daß in der genannten Beziehung das Gleichheitszeichen gilt.

Aufgabe 140935:

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C . Auf dem Umkreis k des Dreiecks liege auf dem Kreisbogen \widehat{AB} , der C nicht enthält, ein von A und B verschiedener Punkt P . Symmetrisch zu P bezüglich der Geraden durch A und C bzw. der durch B und C mögen die Punkte P_1 und P_2 liegen.

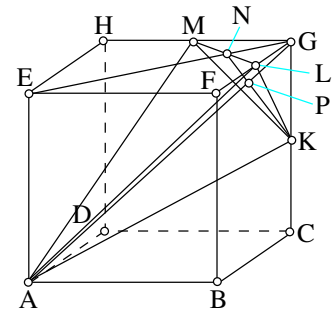
- Man beweise, daß C auf der Geraden g durch P_1 und P_2 liegt.
- Man beweise, daß g genau dann die Tangente im Punkt C an den Umkreis k ist, wenn $CP \perp AB$ gilt.

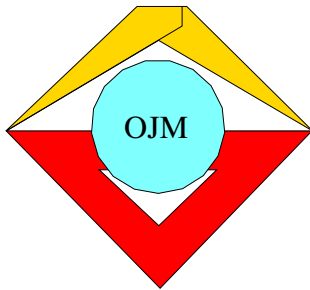


Aufgabe 140936:

In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) und der Kantenlänge a seien K, L, M die Mittelpunkte der Seiten CG, FG bzw. HG .

Man ermittle das Volumen des Pyramidenkörpers mit den Eckpunkten A, K, L, M .





14. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Lösung 140931:

Man kann $x = z_n z_{n-1} \dots z_1$ Ziffer für Ziffer eindeutig bestimmen:

$$z_1 = 6, \text{ da } 6 \cdot 3 \text{ auf } 8 \text{ endet.}$$

...

$$83 \cdot 41\,096 = 3\,410\,968$$

Da jede Ziffer von x eindeutig bestimmt ist, denn das Resultat $3 \cdot z_i$ nimmt für verschiedene Ziffern z_i verschiedene letzte Ziffern an und da für $x = 41\,096$ die Gleichung $83 \cdot x = 3x8$ erstmals erfüllt ist, muss $x = 41\,096$ die kleinste natürliche Zahl mit der geforderten Eigenschaft sein.

Aufgeschrieben und gelöst von salomeMe

Lösung 140932:

Wir können für eine ganze Zahl n die Elemente des Quadrupels schreiben als $a_1 = n - 1$, $a_2 = n$, $a_3 = n + 1$ und $a_4 = n + 2$. Damit geht die Bedingung über in die Gleichung

$$(n - 1)^3 + n^3 = (n + 2)^3 - (n + 1)^3 \quad \text{bzw.}$$

$$2n^3 - 3n^2 + 3n - 1 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = 3n^2 + 9n + 7$$

also $2n^3 - 6n^2 - 6n - 8 = 0$ und damit $n^3 - 3n^2 - 3n - 4 = 0$.

Es ist 4 eine Lösung dieser Gleichung, sodass wir $(3, 4, 5, 6)$ als Lösungsquadrupel erhalten.

Für den Fall $n \neq 4$ können wir die Gleichung durch $n - 4$ teilen und erhalten $n^2 + n + 1 = 0$. Diese Gleichung hat aber keine ganzzahligen Lösungen, sodass auch keine weiteren Lösungsquadrupel existieren.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 140933:

Es ist $F_{ABC} = F_{ABD} = \frac{1}{2}ah$, also $F_1 + F_2 = F_1 + F_4 = \frac{1}{2}ah$ und damit insbesondere $F_2 = F_4$.

Analog ist $F_{ACD} = F_{BCD} = \frac{1}{2}ch$, also $F_3 + F_4 = F_2 + F_3 = \frac{1}{2}ch$.

Die Winkel $\sphericalangle ASB$ und $\sphericalangle CSD$ sind Scheitelwinkel, also gleich groß. Genauso stimmen die Winkel $\sphericalangle BAS$ und $\sphericalangle DCS$ überein, da sie Wechselwinkel sind. Demnach stimmen die Dreiecke $\triangle ABS$ und $\triangle CDS$ in zwei Innenwinkeln überein, sind also ähnlich zueinander und es gilt $\frac{F_3}{F_1} = \left(\frac{|SC|}{|AS|}\right)^2$.

Es ist nach Strahlensatz $\frac{|AC|}{|AS|} = \frac{h}{h_S}$, wobei h_S die Länge der Höhe von S auf AB sei. Insbesondere ist damit

$$\frac{|SC|}{|AS|} = \frac{|AC| - |AS|}{|AS|} = \frac{|AC|}{|AS|} - 1 = \frac{h}{h_S} - 1 = \frac{F_{ABC}}{F_1} - 1 = \frac{F_2}{F_1}$$



Damit ergibt sich $\frac{F_3}{F_1} = \frac{F_2^2}{F_1^2}$ bzw. $\frac{F_3}{F_2} = \frac{F_2}{F_1}$.

Sei $x := \frac{F_3}{F_2}$. Dann gilt einerseits $F_2 + F_3 = (1+x)F_2 = \frac{1}{2}ch$ und andererseits $F_1 + F_2 = (1 + \frac{1}{x}) \cdot F_2 = \frac{1}{2}ah$.
Stellt man die erste dieser beiden Gleichungen nach F_2 um und setzt sie in die zweite ein, erhält man

$$\frac{1+x}{x} \cdot \frac{1}{2}ch \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}ah$$

bzw. $x = \frac{c}{a}$. Damit ergibt sich

$$F_2 = F_4 = \frac{1}{2}h \cdot \frac{ac}{a+c}, \quad F_3 = \frac{1}{2}h \cdot \frac{c^2}{a+c} \quad \text{und} \quad F_1 = \frac{1}{2}h \cdot \frac{a^2}{a+c}$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 140934:

Die genannte Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 \leq 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz &= (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) \\ &= (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \end{aligned}$$

was offensichtlich erfüllt ist. Gleichheit tritt dabei nur genau dann ein, wenn alle drei Quadrate Null sind, also $x = y = z$ gilt.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 140935:

- a) Die Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen zu sich schneidenden Spiegelachsen ist eine Drehung um ihren Schnittpunkt um einen Drehwinkel, der dem Doppelten des Winkels zwischen den Spiegelachsen entspricht.

Da P_1 durch Spiegelung an AC auf P abgebildet wird und dieser Punkt durch Spiegelung an BC auf P_2 , gilt $\sphericalangle P_1CP_2 = 2 \sphericalangle ACB = 180^\circ$, sodass P_1, C und P_2 auf einer Geraden liegen.

- b) Sei M der Mittelpunkt von k . Nach dem Satz des Thales ist M damit auch gleichzeitig Mittelpunkt der Strecke AB . Weiterhin sei M_1 der Bildpunkt von M bei der Spiegelung an AC . Dann ist $|CM| = |CM_1| = |AM| = |AM_1|$, sodass es sich beim Viereck $AMCM_1$ um eine Raute, also insbesondere ein Parallelogramm handelt. Damit gilt $CM_1 \parallel AM = AB$.

Es ist die Gerade P_1C gleich g eine Tangente an k genau dann, wenn $P_1C \perp CM$ gilt. Bei Spiegelung an AC geht P_1C in PC und CM in CM_1 über, sodass g eine Tangente an k genau dann ist, wenn auch $PC \perp CM_1$ gilt. Letztere Gerade ist aber parallel zu AB , sodass diese Bedingung äquivalent zu $PC \perp AB$ ist, \square

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 140936:

Eine Rotation des Würfels um die Raumdiagonale AG um den Winkel 120° bildet den Würfel wieder auf sich selbst ab, wobei die Punkte K, L und M zyklisch vertauscht werden. Demnach geht die Ebene, die durch diese drei Punkte definiert wird, durch die Drehung in sich selbst über und steht also senkrecht auf der Raumdiagonalen AG .

Sei S der Schnittpunkt der Raumdiagonalen mit der Ebene durch K, L und M . Dann ist also SG die Höhe von G auf diese Ebene.

Sei V das Volumen des Tetraeders $KLMG$. Dann gilt einerseits $V = \frac{1}{3}A_{\triangle KLM} \cdot |SG|$ und andererseits

$$V = \frac{1}{3}A_{\triangle MGL} \cdot |GK| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|MG| \cdot |LG| \cdot |KG| = \frac{1}{48}a^3$$



Da

$$A_{\triangle KLM} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |KL| = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$$

gilt, da $\triangle KLM$ ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ist, folgt

$$|SG| = \frac{1}{48}a^3 : \frac{\sqrt{3}}{24}a^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

Damit ergibt sich für das gesuchte Volumen V_P des Pyramidenkörpers mit den Eckpunkten A, K, L, M :

$$V_P = \frac{1}{3}A_{\triangle KLM} \cdot |AS| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)a = \frac{5\sqrt{3}}{36}a^3$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix