11. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Saison 1971/1972

Aufgaben und Lösungen

11. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110831:

In ein leeres Gefäß (ohne Abfluß) mit einem Fassungsvermögen von 1 000 Liter flossen mit gleichmäßiger Strömungsgeschwindigkeit zunächst in jeder Sekunde genau 30 Liter Wasser und von einem späteren Zeitpunkt t ab in jeder Sekunde genau 15 Liter Wasser. Nach genau 40 s, gemessen vom Anfang an, war das Gefäß gefüllt.

Ermittle, welcher Bruchteil des Gefäßinhalts zum Zeitpunkt t gefüllt war!

Aufgabe 110832:

Von sieben Schülern soll jeder auf sein Zeichenblatt vier voneinander verschiedene Geraden zeichnen. Dabei soll der erste Schüler die Geraden so zeichnen, daß kein Schnittpunkt, der zweite so, daß genau ein Schnittpunkt auftritt, der dritte so, daß genau 2 Schnittpunkte, der vierte so, daß genau 3 Schnittpunkte, der fünfte so, daß genau 4 Schnittpunkte, der sechste so, daß genau 5 Schnittpunkte, der siebente so, daß genau 6 Schnittpunkte auftreten. Schnittpunkte, die außerhalb des Zeichenblattes liegen werden hierbei mitgezählt.

Nach einer gewissen Zeit behaupten der zweite, der dritte und der sechste Schüler, daß ihre Aufgabe nicht lösbar sei.

Stelle fest, wer von den drei Schülern recht und wer nicht recht hat, und beweise deine Feststellung!

Aufgabe 110833:

Ermittle alle reellen Zahlen x, für die ein gleichschenkliges Dreieck ΔABC mit den Seitenlängen $a = -5x + 12$; $b = 3x + 20$; $c = 4x + 16$ existiert!

(Überlege, welche Bedingungen a, b und c dabei erfüllen müssen!)

Aufgabe 110834:

Beweise, daß für je zwei rationale Zahlen $a > 2$ und $b > 2$ das Produkt ab größer als die Summe $a + b$ ist!

Aufgabe 110835:

Gisela stellt auf einem Pioniernachmittag folgende Aufgabe:

> "Wenn ich aus diesem Gefäß mit Nüssen an fünf von euch dem ersten die Hälfte und eine halbe Nuß und dann dem zweiten, dem dritten u.s.w. nacheinander jeweils die Hälfte der noch vorhandenen Nüsse und eine halbe dazu gebe, dann habe ich alle verbraucht.
>
> Wie groß ist die Anzahl der Nüsse, die das Gefäß enthielt?
>
> Wie groß ist für jeden der fünf Pioniere die Anzahl der Nüsse, die er erhalten würde?"

Aufgabe 110836:

Einem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$, $a > b$, sei ein Parallelogramm $EFGH$ so einbeschrieben, daß die Seiten DA und BC des Rechtecks von Eckpunkten des Parallelogramms im Verhältnis $2 : 3$ oder $3 : 2$, die Seiten AB und CD im Verhältnis $3 : 4$ oder $4 : 3$ geteilt werden und E auf AB, F auf BC, G auf CD, H auf DA liegen.

Stelle fest, ob dies auf eine oder mehrere Weisen möglich ist! Ermittle in jedem der möglichen Fälle das Verhältnis der Flächeninhalte von Rechteck und Parallelogramm zueinander!

11. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 110831:

Die vom Anfang bis zum Zeitpunkt t vergangene Zeit, während der also genau 30 Liter je Sekunde in das Gefäß flossen, betrage x, dann sind in der Zeit, während der genau 15 Liter je Sekunde in das Gefäß flossen, genau $(40 - x)$ Sekunden vergangen, und es gilt:

$$30x + (40 - x) \cdot 15 = 1000$$

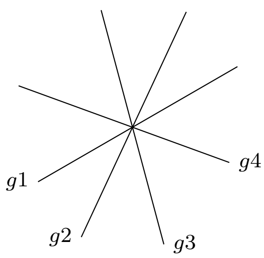
also $15x = 400$, woraus man $x = \frac{80}{3}$ erhält.

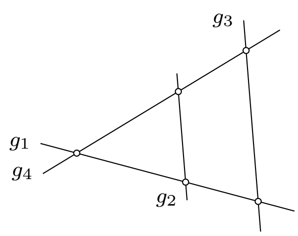
Während dieser $\frac{80}{3}$ s flossen genau $\frac{80}{3} \cdot 30$ l, das sind 800 1 Wasser, in das Gefäß. Wegen $\frac{800}{1000} = \frac{4}{5}$ waren daher zum Zeitpunkt t genau $\frac{4}{5}$ des Gefäßes gefüllt.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 110832:

Der zweite und der sechste Schüler haben nicht recht: denn es gibt z.B. folgende Lösungen:





Der dritte Schüler hat recht.

Beweis: Angenommen, es gäbe 4 Geraden so, dass genau 2 Schnittpunkte auftreten. Da Schnittpunkte existieren, können die vier Geraden nicht sämtlich parallel zueinander sein.

O.B.d.A. mögen sich die Geraden g und g_2 im Punkt A schneiden. Von den beiden anderen Geraden muss mindestens eine nicht durch A gehen, da sonst nur A als Schnittpunkt aufträte.

Dies sei etwa die Gerade g_3. Sie hat also mit einer der beiden Geraden, etwa mit g_1, einen von A verschiedenen Schnittpunkt B.

Dann gilt $g_3 \parallel g_2$, weil sonst entgegen der Aufgabe g_3 mit g_2 einen weiteren von A und B verschiedenen Schnittpunkt hätte. Die vierte Gerade kann nun nicht ebenfalls zu g_2 und g_1 parallel sein, da sie dann g_1 in einem von A und B verschiedenen Punkt schneiden würde. Also hat sie einen Schnittpunkt A' mit g_2 und einen Schnittpunkt B' mit g_3.

Da sie von g_1 verschieden ist, kann nicht gleichzeitig $A = A'$ und $B = B'$ sein. Somit tritt außer A und B noch mindestens ein weiterer Schnittpunkt auf.

Dieser Widerspruch beweist, dass die Annahme, es gäbe 4 Geraden, für die genau 2 Schnittpunkte auftreten, falsch war.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 110833:

Ein Dreieck $\triangle ABC$ mit drei reellen Zahlen a, b, c als Seitenlängen existiert genau dann, wenn gleichzeitig die Ungleichungen

$$\begin{array}{ll} (1)\ \ a > 0 & (4)\ \ a < b + c \\ (2)\ \ b > 0 & (5)\ \ b < a + c \\ (3)\ \ c > 0 & (6)\ \ c < a + b \end{array}$$

gelten. Es ist genau dann gleichschenklig, wenn $a = b$ oder $a = c$ oder $b = c$ gilt. Die Bedingung $a = b$ ist gleichbedeutend mit $-5x + 12 = 3x + 20$, also mit $x = -1$.

Daraus ergibt sich $a = b = 17$ und $c = 12$, und (1) bis (6) sind sämtlich erfüllt.

Die Bedingung $a = c$ ist gleichbedeutend mit $-5x + 12 = 4x + 16$, also mit $x = -\frac{4}{9}$. Daraus ergibt sich $a = c = \frac{128}{8}$ und $b = \frac{56}{3}$, und (1) bis (6) sind sämtlich erfüllt.

Die Bedingung $b = c$ ist gleichbedeutend mit $3x+20 = 4x+16$, also mit $x = 4$. Daraus ergibt sich $b = c = 32$ und $a - 8$, d.h. (1) ist nicht erfüllt.

Mithin gibt es genau für $x = -1$ und $x = -4$ je ein gleichschenkliges Dreieck.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 110834:

Wegen $a > 2$, $b > 2$ ist $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1$.

Also $\frac{a+b}{ab} < 1$ und folglich wegen $ab > 0$ auch $a + b < ab$.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 110835:

Die Anzahl der Nüsse in dem Gefäß sei x. Dann würde der erste Pionier $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - 1)$$

Davon würde der zweite Pionier $\frac{1}{4}(x - 1) + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben

$$\frac{1}{4}(x - 1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x - 3)$$

Davon würde der dritte Pionier $\frac{1}{8}(x - 3) + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben

$$\frac{1}{8}(x - 3) - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}(x - 7)$$

Davon würde der vierte Pionier $\frac{1}{16}(x - 7) + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben

$$\frac{1}{16}(x - 7) - \frac{1}{2} = \frac{1}{16}(x - 15)$$

Davon würde der fünfte Pionier $\frac{1}{32}(x - 15) + \frac{1}{2}$ erhalten, als Rest blieben

$$\frac{1}{32}(x - 15) - \frac{1}{2} = \frac{1}{32}(x - 31)$$

Dieser Rest betrug laut Aufgabe Null. Daraus folgt $x = 31$. Also enthielt das Gefäß genau 31 Nüsse. Von diesen würden bekommen:

Der 1. Pionier 16 Nüsse, der 2. Pionier 8 Nüsse, der 3. Pionier 4 Nüsse, der 4. Pionier 2 Nüsse und der 5.Pionier 1 Nuss.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

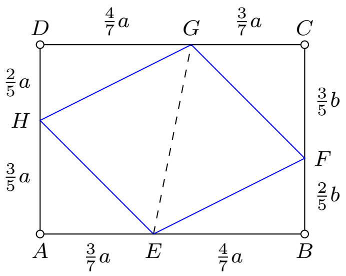
Lösung 110836:

Laut Aufgabe ist $EFGH$ ein Parallelogramm. Daraus folgt: $HE = GF$, $HG = EF$, $\sphericalangle HEG \cong \sphericalangle FGE$ und $\sphericalangle AEG \cong \sphericalangle CGE$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.

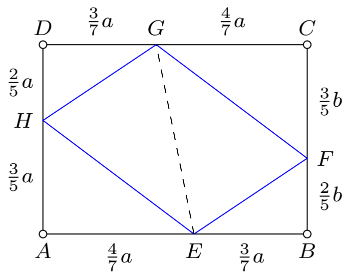
Also gilt: $\sphericalangle AEH \cong \sphericalangle CGF$. Mithin ist $\triangle AEH \cong \triangle CGF$ (sww). Analog lässt sich zeigen, dass $\triangle BEF \cong \triangle DGH$ gilt.

Folglich gilt: $AE = CG$, $BE = DG$, $AH = CF$, $DH = BF$, und es gibt genau die folgenden 4 Möglichkeiten, einem Rechteck $ABCD$ ein Parallelogramm $EFGH$ in der geforderten Weise einzubeschreiben (siehe Abbildungen).

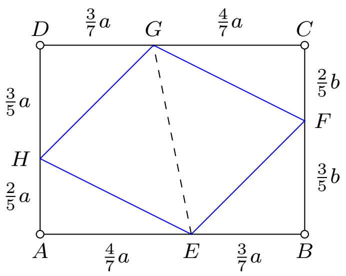
Dabei kann man Figur 3 durch eine Spiegelung der Figur 1 und Figur 4 durch eine Spiegelung der Figur 2 an der Mittelsenkrechten zu AB gewinnen. Es sind daher die folgenden beiden Fälle zu betrachten:



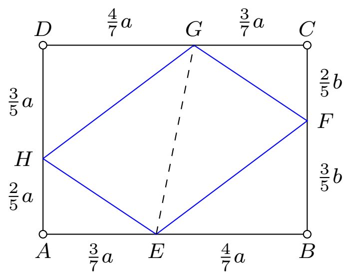
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

Fall 1 : Es sei $DH : HA = BF : FC = 2 : 3$ und $AE : EB = CG : GD = 3 : 4$.

Dann ist der Flächeninhalt A_P des Parallelogramms $EFGH$ gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt A_R des Rechtecks $ABCD$ und der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle AEH$, $\triangle EBF$, $\triangle FCG$ und $\triangle GDH$. Also gilt

$$\begin{aligned} A_P &= ab - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}a \cdot \frac{3}{5}b + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}a \cdot \frac{2}{5}b + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}a \cdot \frac{3}{5}b + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}a \cdot \frac{2}{5}b \right) \\ &= ab - \left(\frac{9}{35}ab + \frac{8}{35}ab \right) = \frac{18}{35}ab \end{aligned}$$

Daraus folgt $A_R : A_P = 35 : 18$.

Fall 2 : Es sei $DH : HA = BF : FC = 2 : 3$ und $AE : EB = CG : GD = 4 : 3$.

Analog wie im Fall 1 erhält man dann

$$\begin{aligned} A_P &= ab - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}a \cdot \frac{3}{5}b + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}a \cdot \frac{2}{5}b + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}a \cdot \frac{3}{5}b + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}a \cdot \frac{2}{5}b\right) \\ &= ab - \left(\frac{12}{35}ab + \frac{6}{35}ab\right) = \frac{17}{35}ab \end{aligned}$$

Daraus folgt $A_R : A_P = 35 : 17$.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission