10. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Saison 1970/1971

Aufgaben und Lösungen

10. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 101231:

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Sind α, β, γ die Größen der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks, so gilt:

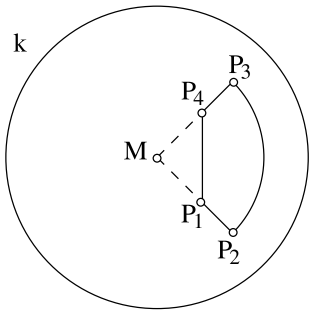
$$\sin^2 \gamma \geqslant \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta.$$

Aufgabe 101232:

In einer Ebene ε liegt ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Als Spiegelung am Kreis k sei diejenige Vorschrift bezeichnet, durch die jedem Punkt $P \neq M$ in ε der folgendermaßen definierte Punkt P' in ε zugeordnet wird:

(1) P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl.

(2) $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = r^2$.



Gegeben sei ferner ein im Innern von k gelegener Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ der folgenden Gestalt:

P_1, P_2 seien auf einem und demselben Strahl gelegen; P_3, P_4 auf einem und demselben anderen von M ausgehenden Strahl. Es gelte $\overline{MP_1} = \overline{MP_4} < \overline{MP_2} = \overline{MP_3}$. Der Winkel $\sphericalangle P_2MP_3$ sei kleiner als 180°. Der Kurvenzug bestehe aus den Strecken P_1P_2, P_3P_4 und P_4P_1 sowie aus dem im Innern des Winkels $\sphericalangle P_2MP_3$ gelegenen Bogen $\overset{\frown}{P_2P_3}$ des Kreises um M durch P_2.

Spiegeln Sie diesen Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ an k (Beschreibung und Begründung einer Konstruktion unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal.)

Aufgabe 101233:

Es sei f die für alle reellen Zahlen x durch $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^6+4}$ definierte Funktion.
Es ist zu entscheiden, ob unter allen Funktionswerten $f(x)$ ein größter und ein kleinster Wert vorkommen. Diese Werte sind gegebenenfalls zu ermitteln.

Aufgabe 101234:

Es sind alle ganzrationalen Funktionen $y = f(x)$ anzugeben, die für alle reellen x die Gleichungen $f(t \cdot x) = t \cdot f(x)$ erfüllen. Dabei sei t eine beliebig gegebene und dann festgehaltene zu denkende reelle Zahl.

Aufgabe 101235:

Es seien zwei nicht in ein und derselben Ebene liegende (also zwei windschiefe) Geraden g_1 und g_2 gegeben.

Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte P, zu denen es Punkte P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2 mit der Eigenschaft gibt, daß P die Strecke P_1P_2 in ein und demselben Verhältnis von innen teilt.

Anmerkung: Eine Gerade g ist zu einer Ebene ε genau dann parallel, wenn es in ε eine Gerade gibt, die zu g parallel ist.

Aufgabe 101236:

Es sei M_1 die Menge aller Punkte, deren Koordinaten x, y in einem ebenen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem die folgenden Ungleichungen erfüllen (x, y reell):

$$y \geq 0 \tag{1}$$
$$y - 2x \leq 1 \tag{2}$$
$$y + 2x \leq 1 \tag{3}$$

Ist ferner n eine positive ganze Zahl, so sei B_n die Menge aller Punkte, für deren Koordinaten die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\frac{2^n - 3}{2^n} < y < \frac{2^n - 1}{2^n} \tag{4}$$
$$-\frac{3}{2^{n+1}} < x < \frac{3}{2^{n+1}} \tag{5}$$

a) Stellen Sie M_1, B_1, B_2, B_3, B_4 graphisch dar.

b) Es ist zu beweisen, daß es einen Punkt $P \in M_1$ gibt, der in keiner der Punktmengen B_n enthalten ist.

c) Es sei M_2 die Punktmenge, für die (1), (2), (3) und

$$y \leq 1 - \frac{1}{1\,000} \tag{6}$$

gilt.

Es ist zu beweisen, daß es ein n_1 gibt mit der Eigenschaft, daß jedes Element von M_2 auch Element der Vereinigungsmenge $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{n_1}$ ist.

Ermitteln Sie die kleinste Zahl n_1, die diese Bedingung erfüllt?

10. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 101231:

Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck gilt $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, also

$$\sin\gamma = \sin(180° - (\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\sin^2\gamma &= \sin^2\alpha\cos^2\beta + 2\sin\alpha\cos\beta\cdot\sin\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\beta\\ &= \sin^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\cos\beta\cdot\sin\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\beta + 4\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\beta\cos\beta\\ &= (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)^2 + \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta\\ &= \sin^2(\alpha-\beta) + \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta \geq \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta \quad \square\end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101232:

Den Bildpunkt P' eines beliebigen von M verschiedenen Punktes P im Inneren von k erhält man konstruktiv wie folgt:

a) Zeichne den von M ausgehenden Strahl s durch P.

b) Errichte in P die Orthogonale auf s und erhalte als einen der beiden Schnittpunkte von dieser mit k den Punkt C, sodass $\sphericalangle CPM = 90°$ und $|CM| = r$ gilt.

c) Man errichte auf der Geraden MC in C die Orthogonale und schneide diese mit s. Der Schnittpunkt heiße P'.

Begründung:

Es liegt P' auch auf s und nach dem Kathetensatz im rechtwinkligen Dreieck $\triangle MP'C$ mit Fußpunkt P der Höhe von C auf die Hypotenuse MP' ist $|MP|\cdot|MP'| = |MC|^2 = r^2$.

Da P_1 bis P_4 alle im Innern des Kreises k liegen, kann man mit der vorgenannten Konstruktion ihre Spiegelpunkte P_1' bis P_4' erhalten. Da alle Punkte P auf dem von M ausgehenden Strahl, die zwischen P_1 und P_2 liegen, auch auf solche P' abgebildet werden, die zwischen P_2' und P_1' auf dem gleichen Strahl liegen, wird die Strecke P_1P_2 auf die Strecke $P_1'P_2'$ abgebildet. Analoges gilt für die Strecke P_3P_4, die auf $P3'P_4'$ abgebildet wird.

Für alle Punkte P auf dem Kreis um M durch P_2 gilt, dass die Bildpunkte auf einem Kreis um M mit Radius $\frac{r^2}{|MP_2|}$ liegen. Damit geht der Bogen P_2P_3 in den Bogen $P_2'P_3'$ im gleichen Winkel über.

Schließlich wird die Gerade durch P_4 und P_1 auf einen Kreis durch P_4', P_1' und M abgebildet; die Strecke

P_4P_1 also auf den Bogen P_4P_1 dieses Kreises, der M nicht enthält.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101233:

Da $x^2 \geq 0$ ist, ist die Frage äquivalent zur Untersuchung der Funktion $g(z) := \frac{1-z}{z^3+4}$, wobei man nur diejenigen z mit $z \geq 0$ betrachtet, denn es ist $g(x^2) = f(x)$.

Wegen $z \geq 0$ ist $1 - z \leq 1$ und $z^3 + 4 \geq 4 > 0$, also $g(z) \leq \frac{1}{4}$. Tatsächlich ist $g(0) = f(0) = \frac{1}{4}$, sodass dies der größte Funktionswert ist, den g bzw. f in ihren jeweiligen betrachteten Definitionsbereichen annehmen.

Wir betrachten nun die Funktion

$$g'(z) = \frac{-(z^3+4) - (1-z) \cdot 3z^2}{(z^3+4)^2} = -\frac{1}{(z^3+4)^2} \cdot (z^3 + 4 + 3z^2 - 3z^3)$$

Es ist

$$g'(z) = 0 \Leftrightarrow z^3 + 4 + 3z^2 - 3z^3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 2z^3 - 3z^2 - 4 = (z-2) \cdot (2z^2 + z + 2)$$

Da

$$2z^2 + z + 2 = (z^2 + 2z + 1) + z^2 + 1 = (z+1)^2 + z^2 + 1 \geq 1 > 0$$

gilt, verschwindet also $g'(z)$ genau für $z = 2$.

Im Intervall $[0; \infty)$ nimmt g, wie schon gesehen, an der Stelle 0 sein globales Maximum von $\frac{1}{4} > 0$ an. Für $z > 1$ ist $g(z)$ sogar negativ, aber aufgrund des größeren Grades des Polynoms im Nenner im Vergleich zu dem des Zählers ist $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$. Also kann nicht g monoton fallend sein, sodass, da es stetig differenzierbar ist, seine Ableitungsfunktion mindestens eine Nullstelle haben muss, an welcher die Funktion g von monoton fallend auf monoton steigend wechselt. Diese Stelle ist, wie oben berechnet, eindeutig bestimmt mit $z = 2$.

Also ist $g(z)$ für alle z im Intervall $[0, 2]$ monoton fallend und für alle z im Intervall $[2, \infty)$ monoton steigend, sodass an der Stelle $z = 2$ die Funktion g ihr globales Minimum mit $g(2) = \frac{1-2}{2^3+4} = -\frac{1}{12}$ annimmt.

Damit ist auch das globale Minimum von f gleich diesem Wert $-\frac{1}{12}$ und wird an den Stellen $x = \pm\sqrt{2}$ angenommen.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101234:

Ist $t = 1$, so erfüllen offenbar alle ganzrationalen Funktionen f die Eigenschaft $f(1 \cdot x) = f(x) = 1 \cdot f(x)$.

Ist $t = 0$, so folgt $f(0) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0$ für beliebige reelle x. Dies wird offenbar von allen ganzrationalen Funktionen mit Absolutglied 0 erfüllt.

Sei ab nun $t \notin 0; 1$. Dann sind die Potenzen $t, t^2, t^3, \ldots$ alle paarweise verschieden. Dann folgt induktiv für alle positiven ganzen Zahlen k die Gleichheit

$$f(t^k) = f(t \cdot t^{k-1}) = t \cdot f(t^{k-1}) = \cdots = t^k \cdot f(1)$$

Wir betrachten die ganzrationale Funktion $g(x) := f(x) - x \cdot f(1)$.

Dann gilt mit der eben gezeigten Eigenschaft für alle positiven ganzen Zahlen k die Gleichung $g(t^k) = f(t^k) - t^k \cdot f(1) = 0$, sodass g die unendlich vielen paarweise verschiedenen Nullstellen t^k, $k \in \mathbb{N}$ besitzt. Da aber nur eine einzige ganzrationale Funktion, nämlich die Nullfunktion, unendlich viele Nullstellen besitzt, ist $g(x) = 0$ für alle x, womit $f(x) = x \cdot f(1)$ für alle reellen Zahlen x folgt.

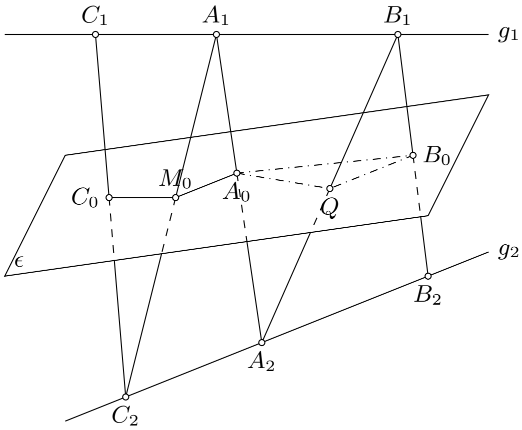
Die einzigen Funktionen, die dies erfüllen, sind die linearen Funktionen ohne Absolutglied, also $f(x) = a \cdot x$ mit einer reellen Zahl a. (Dann ist $f(1) = a$.)

Die Probe bestätigt, dass diese Funktionen tatsächlich die Funktionalgleichung erfüllen: $f(t \cdot x) = a \cdot (t \cdot x) = t \cdot (a \cdot x) = t \cdot f(x)$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 101235:

I. Auf g_1 bzw. g_2 seien je zwei Punkte $A_1 \neq B_1$ bzw. $A_2 \neq B_2$ beliebig gewählt. Die Punkte, die die Strecken A_1A_2, B_1B_2 bzw. B_1A_2 in erwähnten Verhältnis von innen teilen, seien A_0, B_0 bzw. Q genannt, woraus $Q \neq A_0$ und $Q \neq B_0$ folgt.



Nach der Umkehrung eines der Strahlensätze folgt aus der Gleichheit der Teilverhältnisse

$$A_0Q \parallel g_1 \qquad \text{und} \qquad QB_0 \parallel g_2 \tag{1}$$

Aus $g_1 \nparallel g_2$ folgt jetzt $A_0Q \nparallel QB_0$ und damit $A_0 \neq B_0$. Daher liegt Q nicht auf der Geraden durch A_0 und B_0; denn anderenfalls wäre $g_1 \parallel g_2$ im Widerspruch zur Aufgabenstellung.

Also bestimmen A_0, B_0 und Q eine Ebene ϵ, die zu g_1 und g_2 parallel liegt.

II. Seien C_1 auf g_1 und C_2 auf g_2 beliebig liegende Punkte. Der innere Teilpunkt von C_1C_2 mit dem erwähnten Teilverhältnis sei C_0, der von A_1C_2 sei M_0.

Analog zu (I) folgt $M_0A_0 \parallel g_2$ und $C_0M_0 \parallel g_1$. Daher und aus (I) folgt $M_0A_0 \parallel B_0Q$ sowie $C_0M_0 \parallel QA_0$. Also gehört mit A_0 auch M_0 und mit M_0 aus C_0 zu ϵ.

Daraus folgt:

Alle Punkte, die die Verbindungsstrecke eines Punktes auf g_1 mit einem Punktr auf g_2 in ein und demselben Verhältnis von innen teilen, gehören zu ϵ.

III. C_0 sei beliebiger Punkt aus ϵ.

Die Parallele h_1 durch C_0 zu g_1 und die Parallele h_2 durch A_0 zu g_2 sind in ϵ gelegen und einander nicht parallel. Sie schneiden sich daher in genau einem Punkt, der M_0 genannt sei.

Die durch A_1, A_2 und g_2 bestimmte Ebene enthält A_2 und damit AQ_0, also h_2 und folglich M_0. Damit schneiden sich die Geraden durch A_1 und M_0 und die Gerade g_2 in genau einem Punkt, der C_2 genannt sei.

Ebenso (mit $C_2, A_1, M_0, C_0, g_1, h_1$ statt $A_1, A_2, A_0, M_0, g_2, h_2$) folgt dass sich die Geraden durch C_2 und C_0 und die Gerade g_1 in genau einem Punkt schneiden, der C_1 genannt sei.

Dann folgt der Reihe nach, dass auch A_1C_2 durch M_0 und C_1C_2 durch C_0 von innen im erwähnten

Verhältnis geteilt werden.

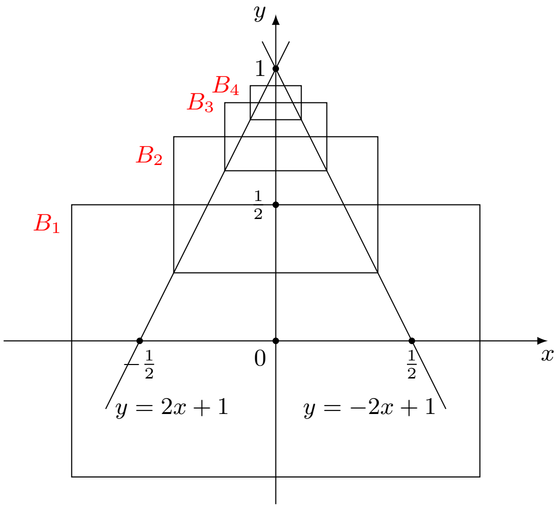
Damit gehört jeder Punkt von ϵ zum geometrischen Ort.

Also ist der gesuchte geometrische Ort die zu g_1 und g_2 parallele Ebene ϵ.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Lösung 101236:

a) Die Menge M_1 besteht aus allen Punkten der schraffiert gezeichneten Dreiecksfläche, einschließlich der Randpunkte. Die Mengen B_1, B_2, B_3, B_4 bestehen jeweils aus allen im Innern der gezeichneten Rechtecke gelegenen Punkte (also ohne die jeweiligen Randpunkte).



b) Wegen (1), (2), (3) gilt $P_1(0;1) \in M_1$. Die Abstände der oberen Seiten der B_n enthaltenden Rechtecke von der x-Achse sind

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Für alle $n = 1, 2, ...$ gilt $a_n < 1$, also $P_1 \notin B_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$. Der Punkt $(0; 1)$ gehört zu M_1, da der die Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllt, wie man aus $1 \geq 0$, $1 - 2 \cdot 0 \leq 1$, $1 + 2 \cdot 0 \leq 1$, ersieht.

Andererseits ist dieser Punkt für kein $n = 1, 2, ...$ in B_n enthalten, da für jedes $n = 1, 2, ...$ die Beziehung $1 > 1 - \frac{1}{2^n}$ gilt, also die rechte Ungleichung aus (4) von diesem Punkt nicht erfüllt wird.

c) 1. Wir zeigen: Ist eine positive ganze Zahl $n_0 \leq 9$, so hat sie nicht die Eigenschaft, dass jedes Element von M_2 auch Element von $B_1 \cup ... \cup B_{n_0}$ ist.

Beweis:

Zu M_2 gehört auch der Punkt $(0; \frac{999}{1000})$, da er die Ungleichungen (1), (2), (3), (6) erfüllt. Andererseits ist dieser Punkt für kein $n = 1, ..., n_0$ in B_n enthalten, da für jedes $n = 1, ..., n_0$, die Beziehung $1 - \frac{1}{1000} > 1 - \frac{1}{2^n}$ gilt, also die rechte Ungleichung aus (4) von diesem Punkt nicht erfüllt wird.

2. Wir zeigen: Ist eine ganze Zahl $n_1 \geq 10$, so hat sie die Eigenschaft, dass jedes Element von M_2 auch Element von $B_1 \cup ... \cup B_{n_0}$ ist.

Beweis:

Sei (x, y) irgendein Punkt aus M_2. Dann erfüllt er die Ungleichungen (1), (29, (3), (6). Aus (1), (6) folgt

$$\frac{1}{1000} \leq 1 - y \leq 1 \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{2^{n_1}} < 1 - y \leq 1$$

Wegen

$$1 > \frac{1}{2^1} > \frac{1}{2^2} > ... > \frac{1}{2^{n_1}}$$

gibt es somit unter den Zahlen $n = 1, 2, ..., n : 1$ eine, für die $\frac{1}{2^n} < 1 - y \leq \frac{1}{2^{n_1}}$ gilt. Für diese gilt dann erst recht

$$\frac{1}{2^n} < 1 - y < \frac{3}{2^n} \qquad \text{also} \qquad 1 - \frac{3}{2^n} < y < 1 - \frac{1}{2^n}$$

ferner wegen (2), (3) auch $y - 1 \leq 2x \leq 1 - y$, also

$$-\frac{3}{2^{n+1}} < x < \frac{3}{2^{n+1}}$$

und somit insgesamt $(x, y) \in B_n$, womit die Behauptung gezeigt ist.

3. Aus 2. folgt die zu beweisende Existenz einer Zahl n_1 mit der genannten Eigenschaft; aus 1. und 2. folgt, dass die gesuchte kleinste Zahl n_1 mit der genannten Eigenschaft die Zahl $n_1 = 10$ ist.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission