10. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1970/1971

Aufgaben und Lösungen

10. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100931:

Günter verbrachte in seinen Ferien eine Anzahl von Tagen mit seiner FDJ-Gruppe in einem Lager. An jedem Tage wurden aus seiner Gruppe genau zwei Schüler vormittags und genau zwei Schüler nachmittags zum Tischdienst eingeteilt. Im Laufe der Tage wurden alle Schüler seiner Gruppe gleich oft zu diesem Tischdienst eingesetzt. Ferner ist folgendes bekannt:

(1) Günter war an genau 6 Tagen zum Tischdienst eingeteilt.

(2) Wenn er nachmittags Tischdienst hatte, hatte er vormittags keinen.

(3) Er hatte an diesen Tagen genau 13mal nachmittags keinen Tischdienst.

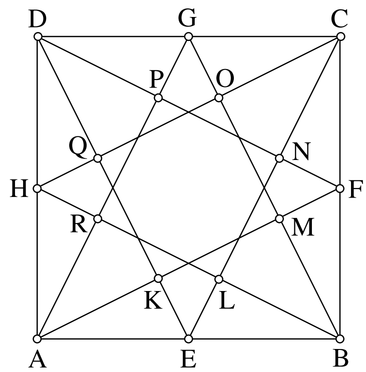
(4) Er hatte an diesen Tagen genau 11mal vormittags keinen Tischdienst.

Aus wieviel Schülern bestand Günters Gruppe?

Aufgabe 100932:

In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a seien die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA mit E, F, G, H bezeichnet. In dem Streckenzug $AFDECHBGA$ auftretenden Schnittpunkte seien so mit K, L, M, N, O, P, R bezeichnet, dass $AKELBMFNCOGPDQHR$ ein (nicht konvexes) Sechzehneck ist, auf dessen Seiten keine weiteren Schnittpunkte des obengenannten Streckenzuges mit sich selbst liegen (siehe Abbildung).

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Sechzehnecks!



Aufgabe 100933:

Wenn x eine reelle Zahl ist, so bedeute $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

(So ist z.B. $[3,7] = 3$, $[-3,7] = -4$, $[4] = 4$.)

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $\left[\frac{10+3x}{6}\right] = \frac{5x+3}{7}$ gilt!

Aufgabe 100934:

Gesucht sind alle geordneten Tripel reeller Zahlen (x, y, z), welche Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{ll} (1) & x + y = 2 \\ (2) & xy - z^2 = 1 \text{ sind!} \end{array}$$

Aufgabe 100935:

Eine dreiseitige Pyramide mit den Ecken A, B, C, D und der Spitze D habe die Kantenlängen $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AC} = 3$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm, $\overline{BD} = 12$ cm, $\overline{CD} = 13$ cm, und $\sphericalangle ABD$ sei ein rechter Winkel.

Man berechne das Volumen V dieser Pyramide.

Aufgabe 100936:

Es sei ein Dreieck ΔABC aus $a + b + c$, α, γ zu konstruieren. Dabei bedeuten wie üblich a, b, c die Längen der Seiten BC, AC, AB und α, γ die Größen der Winkel $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ACB$.

Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

10. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 100931:

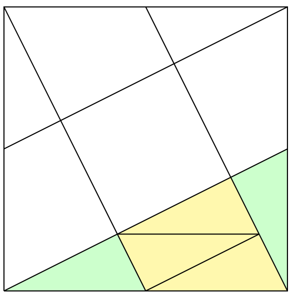
Nach (3) und (4) hatte er genau zwei mal öfter vormittags als nachmittags Tischdienst, und da er nach (2) niemals sowohl vormittags als auch nachmittags Tischdienst hatte, war er mit (1) an genau vier Tagen vormittags, an zweien nachmittags und an 13-4=11-2=9 gar nicht beschäftigt.

Das Lager dauerte damit 9+4+2=15 Tage, sodass $15 \cdot 4 = 60$ Schüler-Tischdienst-Einsätze notwendig waren. Günther war zu 6 davon eingeteilt, sodass also insgesamt seine Gruppe aus $\frac{60}{6} = 10$ Schülern bestand.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 100932:

Der Flächeninhalt des Sechszehnecks ergibt sich als Differenz der Fläche des Quadrats und der der acht (aus Symmetriegründen – Spiegelung an den Diagonalen bzw. den Mittelparallelen des Quadrats bzw. Hintereinanderausführungen davon überführt je zwei solche ineinander – kongruenten) Dreiecke AKL, ELB, BMF, FNC, COG, GPD, DQH und HRA.



Der Flächeninhalt des Dreiecks AED beträgt $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$. Dieses lässt sich zerlegen in das Dreieck AKE und das Dreieck DAK. Aufgrund der Parallelität der Geraden $AK = AF$ und $HQ = HC$ geht das Dreieck DAK durch Streckung mit Zentrum D um den Faktor 2 aus dem Dreieck DHQ hervor, da $|DA| = 2|DH|$ ist.

Sei mit x der Flächeninhalt des Dreiecks AKE bezeichnet. Dann hat also auch das Dreieck DHQ den Flächeninhalt x und das Dreieck DAK demnach den Flächeninhalt $2^2 \cdot x = 4x$.

Nach der Vorüberlegung ist der Flächeninhalt des Dreiecks AED gleich $4x + x = \frac{1}{4}a^2$, sodass jedes einzelne der betrachteten "kleinen Dreiecke" den Flächeninhalt von $x = \frac{1}{20}a^2$ besitzt.

Der Flächeninhalt des Sechzehnecks beträgt demnach $a^2 - 8 \cdot \frac{1}{20}a^2 = \frac{3}{5}a^2$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 100933:

Die Gleichung wird genau dann erfüllt, wenn die folgenden beiden Ungleichungen zugleich wahr sind: $\frac{5x+3}{7} \leq \frac{10+3x}{6}$ und $\frac{10+3x}{6} < \frac{5x+3}{7} + 1 = \frac{5x+10}{7}$.

Die erste Ungleichung ist äquivalent zu $\left(\frac{5}{7} - \frac{3}{6}\right) x \leq \frac{10}{6} - \frac{3}{7}$ bzw. $\frac{3}{14} \cdot x \leq \frac{26}{21}$, also $x \leq \frac{26}{21} \cdot \frac{14}{3} = \frac{52}{9}$.

Und die zweite Ungleichung ist äquivalent zu $\left(\frac{3}{6} - \frac{5}{7}\right) \cdot x < \frac{10}{7} - \frac{10}{6}$ bzw. $-\frac{3}{14} \cdot x < -\frac{5}{21}$, also $x > \frac{5}{21} \cdot \frac{14}{3} = \frac{10}{9}$.

Zusammengefasst erfüllen also genau die reellen Zahlen x mit $\frac{10}{9} < x \leq \frac{52}{9}$ die gegebene Betragsgleichung.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 100934:

Aus der zweiten Gleichung erhält man $xy = 1 + z^2 \geq 1$ und damit

$$0 \leq (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 2^2 - 4xy \leq 4 - 4 = 0$$

Also muss in dieser Ungleichungskette an jeder Stelle Gleichheit gegolten haben, sodass $x - y = 0$ und $xy = 1$, also $x = y = \pm 1$, und mit Gleichung (2) auch $z = 0$ folgt.

Es kann also nur zwei Lösungstripel (x, y, z) geben, nämlich $(-1, -1, 0)$ und $(1, 1, 0)$. Die Probe bestätigt aber nur das zweite, sodass $(1, 1, 0)$ die einzige Lösung des gegebenen Gleichungssystems ist.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 100935:

Da $AB^2 + AC^2 = BC^2$ gilt, ist nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig, wobei AB und AC seine Katheten sind.

lso beträgt sein Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 6cm^2$. Da $\sphericalangle ABD = 90°$ beträgt, ist die Strecke BD auch gleichzeitig die Höhe der Spitze D über der Grundfläche ABC. Also beträgt das Volumen V der Pyramide genau $V = \frac{1}{3} A \cdot BD = 24cm^3$.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 100936:

1) Man zeichne zuerst ein beliebiges Dreieck mit den Innenwinkeln α und γ, indem man ausgehend von zwei Punkten A und C' an die Strecke AC' in A den Winkel α und in C' den Winkel γ in entsprechender Orientierung, dass sich ein Dreieck $AB'C'$ mit B' als Schnittpunkt der freien Schenkel der gezeichneten Winkel ergibt.

2) Auf einer Geraden durch A, welche weder B' noch C' enthält, konstruiere man einen Punkt S' mit $AS' = AC' + AB' + B'C'$, indem man zuerst die Strecke AC' an A, dann AB' an den so erhaltenen ersten Zwischenpunkt und schließlich die Strecke $B'C'$ an den gerade erhaltenen zweiten Zwischenpunkt auf der Geraden anträgt.

3) Auf dem von A ausgehenden Strahl, der S enthält, konstruiere man auch den Punkt S mit $AS = a+b+c$.

4) Man konstruiere nun die Parallele zu $B'S'$ durch S. Diese schneide die Gerade AB' in B.

5) Analog sei der Schnittpunkt der Parallelen zu $C'S'$ durch S mit der Geraden AC' mit C bezeichnet.

Dann ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck.

Beweis:

as Dreieck $\triangle AB'C'$ ist ähnlich zum zu konstruierenden Dreieck, da es nach Konstruktion in zwei Innenwinkeln mit diesem übereinstimmt. Also gibt es einen Streckungsfaktor k, sodass alle Seitenlängen des Dreiecks

$\triangle AB'C'$ um den gleichen Faktor k gestreckt werden müssen, um die Seitenlängen des gesuchten Dreiecks zu erhalten.

Demzufolge ist auch der Umfang des Dreiecks $\triangle AB'C'$ um den Faktor k zu klein. Dieser Umfang ist durch die Strecke AS' gegeben; der Umfang des zu konstruierenden Dreiecks mit AS, der Streckungsfaktor also durch $\frac{AS}{AS'}$.

Nach den Strahlensätzen ist aber nach Konstruktion $\frac{AB}{AB'} = \frac{AS}{AS'}$ und analog $\frac{AC}{AC'} = \frac{AS}{AS'}$, da die von A ausgehenden Strahlen AB, AC und AS von den Parallelen BS und $B'S'$ bzw. CS und $C'S'$ geschnitten werden. Damit ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck. $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix