10. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1970/1971

Aufgaben und Lösungen

10. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100921:

Vier Freunde A, B, C und D verstecken einen Brief. Einer von ihnen nimmt ihn an sich. Anschließend macht jeder von ihnen die folgenden genannten drei Aussagen, von denen wenigstens je zwei wahr sind.

A (1) ”Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn C.”
(2) ”Ich habe den Brief nicht.”
(3) ”Mein Freund hat den Brief.”

B (1) ”Entweder A oder C hat den Brief.”
(2) ”Alle Aussagen von A sind wahr.”
(3) ”D hat den Brief nicht.”

C (1) ”Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn B.”
(2) ”Ich habe den Brief.”
(3) ”B macht keine falschen Aussagen.”

D (1) ”Ich habe den Brief nicht.”
(2) ”Entweder hat A den Brief, oder er hat ihn nicht.”
(3) ”B hat das Spiel ausgedacht.”

Wer hat den Brief?

Aufgabe 100922:

Jemand behauptet:

Wenn von zwei natürlichen Zahlen a und b jede die Eigenschaft hat, sich als Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen zu lassen, dann hat auch das Produkt von a und b diese Eigenschaft.

a) Geben Sie ein Zahlenbeispiel an!

b) Beweisen Sie diesen Satz!

Aufgabe 100923:

Gegeben seien zwei reelle Zahlen $m \neq 0$ und n. Ferner sei f die durch $f(x) = mx + n$ für alle reellen Zahlen definierte Funktion.

a) Ermitteln Sie für $m = 1$ und $n = 0$ alle Zahlen x_0, für die $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$ gilt (d.h. für die der Funktionswert an der Stelle $x_0 + 2$ doppelt so groß ist wie der an der Stelle x_0)!

b) Ermitteln Sie bei beliebig gegebenen reellen Zahlen $m \neq 0$ und n alle Zahlen x_0, für die $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$ gilt!

Aufgabe 100924:

Eine regelmäßige gerade dreiseitige Pyramide ist eine Pyramide, deren Grundfläche eine gleichseitige Dreiecksfläche ist und deren Höhenfußpunkt mit dem Schwerpunkt der Grundfläche zusammenfällt.

In der regelmäßigen Pyramide mit den Ecken A, B, C, D und der Spitze D sei der Neigungswinkel zwischen jeder der drei Seitenflächen und der Grundfläche $60°$ groß. Die Grundfläche habe die Seitenlänge a.

Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide!

Anmerkung: Haben zwei ebene Flächen eine gemeinsame Kante und ist P ein von den Endpunkten verschiedener Punkt dieser Kante, dann ist der Winkel, den zwei in P auf der Kante errichtete und in den beiden Flächen gelegene senkrecht stehende Strecken miteinander bilden, gleich dem Neigungswinkel der beiden Flächen zueinander.

10. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 100921:

Angenommen, C hätte den Brief nicht. Dann wäre Cb) falsch. Also folgt, da laut Aufgabe von den drei Aussagen, die C gemacht hat, wenigstens zwei wahr sind, daß Cc) wahr sein müßte. Daher wären alle Aussagen, von B und wegen Bb) auch alle Aussagen von A wahr. Wegen Ba) und Ab) müßte mithin doch C den Brief haben. Dieser Widerspruch beweist, daß die Annahme, C hätte den Brief nicht, falsch war.

Also verbleibt als einzige Möglichkeit nur die Annahme: C hat den Brief.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Lösung 100922:

a) Es gilt z.B. für $a = 5$ und $b = 13$

$$5 = 1^2 + 2^2, \quad 13 = 2^2 + 3^2, \quad 5 \cdot 13 = 65 = 1^2 + 8^2.$$

b) Angenommen, a und b seien zwei derartige natürliche Zahlen. Dann gilt mit natürlichen Zahlen u, v, x, y

$$a = u^2 + v^2, \quad b = x^2 + y^2,$$

also

$$\begin{aligned} ab &= (u^2 + v^2)(x^2 + y^2),\\ &= u^2x^2 + u^2y^2 + v^2x^2 + v^2y^2,\\ &= (u^2x^2 + v^2y^2) + (u^2y^2 + v^2x^2),\\ &= (u^2x^2 + 2uvxy + v^2y^2) + (u^2y^2 - 2uvxy + v^2x^2),\\ &= (ux + vy)^2 + (uy - vx)^2 (1)\\ &= (ux + vy)^2 + (vx - uy)^2 (2) \end{aligned}$$

Da entweder $(uy-vx)$ oder $(vx-uy)$ und sämtliche der Zahlen u, v, x, y natürliche Zahlen sind, stehen auch in den Klammern von (1) bzw. (2) natürliche Zahlen, d.h. ab ist als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellbar.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Lösung 100923:

b) Für die Funktion $f(x) = mx + n$ gilt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot f(x_0) &= f(x_0 + 2) \\ 2 \cdot (mx_0 + n) &= m \cdot (x_0 + 2) + n \\ 2 \cdot mx_0 + 2 \cdot n &= mx_0 + n + 2 \cdot m \\ mx_0 &= 2 \cdot m - n \\ x_0 &= \frac{2 \cdot m - n}{m} \end{aligned}$$

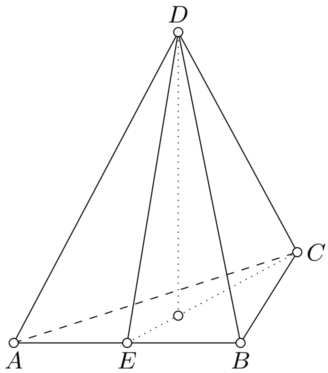
Damit sind alle $x_0 = \frac{2 \cdot m - n}{m}$ Lösungen der Gleichung $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$ für $f(x) = mx + n$. Da laut Voraussetzung $m \neq 0$ gilt, kann der Zähler auch niemals Null und damit der gesamte Bruch undefiniert werden.

a) Wenn $m = 1$ und $n = 0$ gilt die Gleichung laut Teilaufgabe b) für alle $x_0 = \frac{2 \cdot m - n}{m} = \frac{2 \cdot 1 - 0}{1} = 2$.

Aufgeschrieben und gelöst von Gerd Wachsmuth

Lösung 100924:

Für das Volumen V der Pyramide mit den Ecken A, B, C, D gilt $V = \frac{1}{3}Gh$, wobei G der Inhalt der Grundfläche und h die Länge der Pyramidenhöhe ist. Laut Aufgabe ist die Grundfläche die Fläche des gleichseitigen Dreiecks ΔABC. Für den Flächeninhalt G dieses Dreiecks gilt $G = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.



Es sei F der Fußpunkt der Pyramidenhöhe. Da F nach Voraussetzung mit dem Schwerpunkt des Dreiecks ΔABC zusammenfällt, schneidet der von C ausgehende Strahl durch F die Seite AB in deren Mittelpunkt, der mit E bezeichnet sei. Damit ist CE Seitenhalbierende und wegen der Gleichseitigkeit von ΔABC auch Höhe dieses Dreiecks. Folglich gilt

$$|AE| = |EB| \tag{1}$$

sowie

$$|FE| = \frac{1}{3}|CE| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}.$$

Da $\Delta DFA \simeq \Delta DFB$ (sws) ist, gilt

$$|AD| = |BD|,$$

also ist ΔABD gleichschenklig. Wegen (1) ist folglich DE Höhe in diesem Dreieck. Der Winkel $\sphericalangle FED$ ist daher der Neigungswinkel zwischen der Grundfläche und einer Seitenfläche der Pyramide und somit laut Aufgabe 60°. Da $\sphericalangle EFD$ ein rechter Winkel ist, läßt sich die Fläche des Dreiecks ΔEFD als die Hälfte der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks auffassen. Also gilt

$$|DE| = 2|EF| = \frac{a}{3}\sqrt{3}.$$

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt nun

$$h = |DF| = \sqrt{|DE|^2 - |EF|^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{2}.$$

Damit ergibt sich für das Volumen V der Pyramide der Wert

$$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{24}\sqrt{3}.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (12)

Quellenverzeichnis

(12) Buch: Neue Mathematik-Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1990, Aulis-Verlag