6. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen

6. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 061221:
Beweisen Sie folgenden Satz:

Sind α, β, γ die Gradmaße der Winkel eines beliebigen ebenen Dreiecks, so gilt stets:

$$\cot\alpha \cdot \cot\beta + \cot\beta \cdot \cot\gamma + \cot\gamma \cdot \cot\alpha = 1.$$

Aufgabe 061222:
In einer Ebene seien die vier Punkte P, Q, R, S ($P \neq Q, R \neq S, PQ$ nicht senkrecht auf RS) gegeben.

Es ist zu zeigen, daß man dann stets vier Geraden p, q, r, s mit P auf p, Q auf q, R auf r und S auf s so konstruieren kann, daß ihre sämtlichen Schnittpunkte die Ecken eines Quadrates bilden.

Aufgabe 061223:
Beweisen Sie folgende Behauptung!

Ist $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ durch 30 teilbar, dann ist auch $p = a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5$ durch 30 teilbar.

($a_1, a_2, \dots, a_n$ seien n ganze Zahlen.)

Aufgabe 061224:
Es sei M der Mittelpunkt der Kugel K_1, und P sei ein Punkt außerhalb K_1. Ferner sei K_2 die Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius von der Länge MP, und I_F sei der Flächeninhalt des innerhalb K_1 liegenden Teiles von K_2.

Beweisen Sie, daß I_F von der Lage des Punktes P unabhängig ist!

Aufgabe 061225:
Es seien n, p, r, s natürliche Zahlen. Ferner sei

$$u = \frac{(r + s\cdot\sqrt{p})^n + (r - s\cdot\sqrt{p})^n}{2}\,, \quad v = \frac{(r + s\cdot\sqrt{p})^n - (r - s\cdot\sqrt{p})^n}{2\cdot\sqrt{p}}\,, \quad t = r^2 - s^2 p\,, \quad z = u^2 - t^n\,.$$

Man beweise:

a) u und v sind natürliche Zahlen.

b) Die (somit ganze) Zahl z ist durch v^2 ohne Rest teilbar.

Aufgabe 061226:

a) Geben Sie alle Tripel reeller Zahlen (x, y, z) an, die das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ 4x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 8x & + & 5y & + & 3z & = & 4 \end{array} \tag{1}$$

erfüllen!

b) Bilden Sie alle Gleichungssysteme, die sich von dem Gleichungssystem (1) in genau einem Koeffizienten unterscheiden und unendlich viele Lösungen besitzen!

(Als "Koeffizienten" seien hier sowohl die auf der "linken Seiten" stehenden "Vorzahlen" der Variablen als auch die "absoluten Glieder" auf den "rechten Seiten" bezeichnet.)

Geben Sie auch in diesen Fällen alle Tripel reeller Zahlen an, die die jeweiligen Gleichungssysteme erfüllen!

c) Bilden Sie ein Gleichungssystem, das sich von (1) in genau zwei Koeffizienten unterscheidet, das aber von keinem Tripel reeller Zahlen erfüllt wird!

6. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 061321:
Es gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

(1) $\gamma = 180^o - \alpha - \beta$ (Innenwinkelsumme im Dreieck)

(2) $\sin(180^o - x) = \sin x$

(3) $\cos(180^o - x) = -\cos x$

(4) $\cot\gamma = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\cos(180^o-\alpha-\beta)}{\sin(180^o-\alpha-\beta)} = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ (mit (1), (2) und (3))

(5) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$ (Additionstheorem)

(6) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$ (Additionstheorem)

Damit ergibt sich für die Ausgangsgleichung mit (4), (5) und (6):

$$\begin{aligned}
&\cot\alpha\cdot\cot\beta + \cot\beta\cdot\cot\gamma + \cot\gamma\cdot\cot\alpha = \\
&= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\cdot\left(-\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}\right) + \left(-\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}\right)\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\
&= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta} \\
&= \frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} - \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\cdot\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta} \\
&= \frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)-(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)} \\
&= \frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta-\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)} \\
&\quad+\frac{-\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta+\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)} \\
&= \frac{\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta+\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)} \\
&= \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Das Kürzen ist problemlos möglich, da $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ Winkel in einem nicht-entarteten Dreieck sind.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 061322:

Es wird ein reiner Existenzbeweis gegeben, dass es solche Geraden gibt, keine explizite Konstruktion dieser.

Es sei $0 \leq \alpha < 180°$ ein Winkel. Wir betrachten nun diejenige Gerade p, die mit der positiven x-Achse den Winkel α einschließt (bzw. im Fall $\alpha = 0$ parallel zu dieser ist) und durch P verläuft, sowie die dazu parallele Gerade q durch Q. Dann variiert in Abhängigkeit von α der Abstand $d_p(\alpha)$ dieser beiden Parallelen zwischen 0 (falls $PQ = p = q$ gilt) und $|PQ| > 0$ (falls p und q senkrecht auf PQ stehen).

Zu p werden nun die Orthogonalen r durch R und s durch S betrachtet. Wieder gilt, dass der Abstand $d_r(\alpha)$ dieser beiden Parallelen r und s in Abhängigkeit von α zwischen 0 (falls $RS = r = s$ gilt) und $|RS| > 0$ (falls r und s senkrecht auf RS stehen) variiert.

Ändert man stetig den Winkel α, so verändern sich auch stetig die Abstände $d_p(\alpha)$ von p und q sowie $d_r(\alpha)$ von r und s. Diese Abstände können nicht gleichzeitig Null werden, da in diesem Fall wegen $p \perp r$ auch $PQ = p$ und $RS = r$ senkrecht aufeinander stünden, was nach Aufgabenstellung nicht der Fall ist.

Sei o.B.d.A. der Winkel α_1, an dem $d_p(\alpha_1) = 0$ ist, kleiner als der Winkel α_2, für den der Abstand $d_r(\alpha_2) = 0$ wird. Dann gilt für die Differenz $d_p(\alpha) - d_r(\alpha)$ für $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, dass sie an der linken Intervallgrenze negativ, an der rechten positiv und dazwischen stetig ist, es also eine Stelle α_0 geben muss, an welcher diese Differenz Null wird und die beiden Paare von Parallelen den gleichen Abstand zueinander haben. Da die nicht-parallelen Geraden nach Konstruktion orthogonal zueinander sind, bilden die vier Schnittpunkte dieser Geraden die Eckpunkte eines Quadrats.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 061323:

Es genügt zu zeigen, dass $p - s$ durch 30 teilbar ist. Mit $p - s$ ist auch $p = (p - s) + s$ durch 30 teilbar.

Es ist

$$p - s = (a_1^5 - a_1) + (a_2^5 - a_2) + ... + (a_n^5 - a_n)$$

Da für alle k $(k = 1, 2, ..., n)$

$$d_k = a_k^5 - a_k = a_k(a_k - 1)(a_k + 1)(a_k^2 + 1) \qquad (1)$$

gilt, und da alle a_k ganze Zahlen sind, ist jedes d_k sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar, d.h., jedes d_k ist durch 6 teilbar.

Ebenfalls kann man zeigen, dass jedes d_k auch durch 5 teilbar ist.

Wenn $a_k \equiv 0 \pmod 5$ ist, so ist $d_k \equiv 0 \pmod 5$.

Wenn $a_k \equiv \pm 1 \pmod 5$ ist, so ist wegen (1) $d_k \equiv 0 \pmod 5$.

Wenn $a_k \equiv 2 \pmod 5$ oder wenn $a_k \equiv -2 \pmod 5$ ist, so ist $a_k^2 \equiv -1 \pmod 5$, d.h. $a_k^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$ und daher $d_k \equiv 0 \pmod 5$.

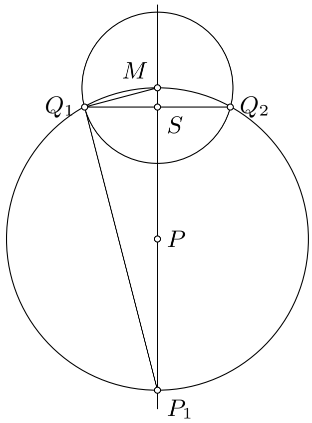
Folglich ist bei beliebigem ganzzahligen a_k das entsprechende d_k durch 5 teilbar.

Da alle d_k sowohl durch 6 als auch durch 5 teilbar sind und da ferner 5 und 6 teilerfremd zueinander sind, sind alle d_k und damit neben $p - s$ auch p durch 30 teilbar.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 061324:

Der Radius von K_1 sei r. Man lege eine Ebene ϵ durch M und P (Abbildung). Der Schnittkreis k von K_1 und K_2 schneidet ϵ in zwei Punkten Q_1, Q_2. Der Schnittpunkt von MP und Q_1Q_2 sei S genannt.



P_1 sei der von M verschiedene Schnittpunkt von PM und K_2. Dann ist I der Flächeninhalt der auf K_2 liegenden Kugelkappe, deren Höhe die Länge MS hat. Da MP der Radius von K_2 ist, gilt

$$I = \pi \cdot 2 \cdot |MP| \cdot |MS|$$

Da das Dreieck MQ_1P_1 nach dem Satz des Thales rechtwinklig ist, gilt nach dem Kathetensatz:

$$MQ^2 = 2|MP| \cdot |MS|$$

Mithin erhält man

$$I = \pi \cdot |MQ_1|^2 = \pi r^2$$

womit gezeigt ist, dass I nicht von der Lage des Punktes P abhängt.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (28)

Lösung 061325:

a) Nach dem binomischen Satz ist

$$(r + s \cdot \sqrt{p})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k (s\sqrt{p})^{n-k}$$

und analog

$$(r - s \cdot \sqrt{p})^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} r^k (s\sqrt{p})^{n-k}$$

Addiert man nun die beiden Summen, so ergänzen sich die jeweiligen Summanden mit ungeradem $n-k$ zu 0, während die mit geradem $n-k$ in beiden Summen erhalten bleiben und identisch sind. In diesen Fällen erhält man also jeden Summanden doppelt, wobei diese aufgrund des geraden Exponenten von $s\sqrt{p}$ selbst natürliche Zahlen sind. Damit ist der Zähler eine gerade natürliche Zahl und auch nach der Division durch Zwei damit v eine natürliche Zahl.

Analog heben sich bei der Subtraktion die jeweiligen Summanden mit geradem $n-k$ weg, während für diejenigen mit ungeradem $n-k$ sich der doppelte Wert ergibt. In jedem solchem Summanden ist $\sqrt{p}$ in ungerader Potenz enthalten, lässt sich also als geradzahliges, natürliches Vielfaches von $\sqrt{p}$ darstellen, sodass nach der Division durch $2\sqrt{p}$ eine natürliche Zahl v verbleibt.

b) Es ist

$$u^2 = \frac{(r + s\sqrt{p})^{2n} + (r - s\sqrt{p})^{2n} + 2 \cdot ((r + s\sqrt{p})(r - s\sqrt{p}))^n}{4}$$
$$= \frac{(r + s\sqrt{p})^{2n} + (r - s\sqrt{p})^{2n}}{4} + \frac{t^n}{2}$$

und analog

$$v^2 = \frac{(r+s\sqrt{p})^{2n} + (r-s\sqrt{p})^{2n}}{4} - \frac{t^n}{2}$$

also $z = u^2 - t^n = v^2$, was natürlich direkt $v^2|z$ beweist.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 061326:

a) Addition des doppelten der ersten zur zweiten Gleichung liefert $8x + 5y + 4z = 4$, woraus mit der dritten Gleichung $z = 0$ folgt. setzt man dies ein und zieht vom Doppelten der ersten Gleichung die zweite ab, erhält man $y = 0$ und schließlich $x = \frac{1}{2}$. Damit ist $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ das einzige Lösungstripel, was auch durch die Probe bestätigt wird.

b) Unendlich viele Lösungen hat das Gleichungssystem nur dann, wenn es eine Kombination der Gleichungen gibt, die sich zu $0 = 0$ reduziert. (Die Gleichungen sind linear abhängig.) Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall:

Es gibt eine reelle Zahl k, sodass das k-fache der ersten Gleichung, die zweite ergibt. Daraus ergibt sich folgende Beziehung: $2k = 4$, falls kein x-Koeffizient geändert wurde, oder $k = 2$, falls kein z-Koeffizient geändert wurde.

Da mindestens eine dieser beiden Fälle eintreten muss, ist $k = 2$. Damit muss aber das Doppelte des Koeffizienten von y in der ersten Gleichung dem Koeffizienten von y in der zweiten Gleichung entsprechen, sodass entweder der Koeffizient von y in der ersten Gleichung auf $-\frac{1}{2}$, oder der von y in der zweiten Gleichung auf $+6$ abgeändert werden muss.

In der ersten Variante hat das Gleichungssystem nun die Form

$$\begin{aligned} 2x - \frac{1}{2}y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

und hat (Subtraktion des Doppelten der zweiten von der dritten Gleichung) die Lösungen

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{4} \cdot t, t, 7 \cdot t\right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

In der zweiten Variante hat das Gleichungssystem die Form

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x + 6y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

und hat (Subtraktion der dritten Gleichung vom doppelten der zweiten) die Lösungen

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot t, t, -7 \cdot t\right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Fall:

Es gibt reelle Zahlen k und ℓ, sodass die Summe des k-fachen der ersten und ℓ-fachen der zweiten

Gleichung die dritte ergibt. Daraus erhält man folgende Beziehungen:

$2k + 4\ell = 8$, falls kein x-Koeffizient geändert wurde,

$3k - \ell = 5$, falls kein y-Koeffizient geändert wurde,

$k + 2\ell = 4$, falls keine rechte Seite verändert wurde und schließlich

$k + 2\ell = 3$, falls kein z-Koeffizient geändert wurde.

Da nicht sowohl einer der x-Koeffizienten als auch eine der rechten Seiten modifiziert worden sind, gilt in jedem Fall $k + 2\ell = 4$. Dies widerspricht aber der Bedingung, die eintreten würde, wenn kein z-Koeffizient verändert werden würde. Also kann nur durch die Änderung eines dieser Koeffizienten der Variablen z ein Gleichungssystem konstruiert werden, welches unendlich viele Lösungen hat.

Insbesondere bleiben neben den x-Koeffizienten auch die y-Koeffizienten unangetastet und es ergibt sich zusammen $k = 2$ und $\ell = 1$. Die summe aus dem doppelten der ersten Gleichung und der zweiten Gleichung muss also die dritte ergeben. Dafür gibt es drei Möglichkeiten, den Koeffizient von z in je einer der drei Gleichungen anzupassen:

In der ersten Variante setzt man in der ersten Gleichung den Koeffizienten von z auf $\frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$ und erhält das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + \frac{1}{2}z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

welches die Lösungen $\left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{4} \cdot t, t, 7 \cdot t \right) \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$ besitzt.

In der zweiten Variante ändert man den Koeffizienten von z in der zweiten Gleichung auf $3 - 2 \cdot 1 = 1$ ab und erhält das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

welches die Lösungen $\left\{ \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot t, t, -7 \cdot t \right) \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$ besitzt.

Und schließlich in der dritten Variante wird der Koeffizient von z in der dritten Gleichung auf $2 \cdot 1 + 2 = 4$ gesetzt, sodass man das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 4z &= 4 \end{aligned}$$

erhält, welches die Lösungen $\{ (t, 0, 1 - 2 \cdot t) | \, t \in \mathbb{R} \}$ besitzt.

Insgesamt hat man also fünf verschiedene Möglichkeiten je einen der Koeffizienten des ursprünglich gegebenen Gleichungssystems anzupassen, so dass das jeweilige neue Gleichungssystem dann unendlich viele Lösungen hat.

c) Man ändere den Koeffizienten von y in der zweiten Gleichung auf $+6$ und die rechte Seite der zweiten Gleichung auf 0 ab. Dann erhält man das neue Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x + 6y + 2z &= 0 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

wobei aus der ersten Gleichung $4x + 6y + 2z = 2 \neq 0$ folgt, was der zweiten Gleichung widerspricht. Damit hat dieses Gleichungssystem keine Lösung.

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972

(28) alpha, Mathematische Schülerzeitschrift