6. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Saison 1966/1967

Aufgaben und Lösungen

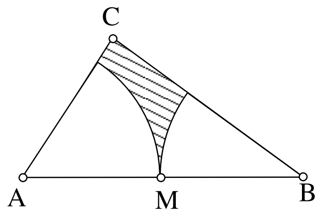
6. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060811:

In dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit $\overline{AB} = c = 7$ cm und $\sphericalangle ACB = \gamma = 90°$ seien um die Punkte A und B Kreisbögen mit einem Radius von der Länge $\frac{7}{2}$ cm geschlagen (siehe Abbildung).

Ermittle den Inhalt I_F der in der Abbildung schraffiert gezeichneten Fläche!



Aufgabe 060812:

Aus Kuhmilch kann man 21% der Masse an Rahm gewinnen. Aus Rahm gewinnt man Butter, und zwar beträgt die Buttermasse 23% der Rahmmasse.

Ermittle die kleinste Menge Kuhmilch, die ausreicht, um genau 1 kg Butter unter den angegebenen Bedingungen zu gewinnen!

Die Milchmenge ist in kg anzugeben und als Dezimalbruch zu schreiben, der auf eine Stelle nach dem Komma so zu runden ist, daß die Menge ausreicht, um 1 kg Butter zu gewinnen.

Aufgabe 060813:

Auf einer 1 km langen kreisförmigen Bahn wird ein Radrennen ausgetragen. Zu einer gewissen Zeit hat der Radsportler B genau 500 m Vorsprung vor dem Radsportler A. A fährt mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h, B mit einer Geschwindigkeit von 45 km/h.

Nach wieviel Minuten würde A den Fahrer B ein ersten Mal einholen, wenn beide mit gleichbleibender Geschwindigkeit weiterfahren würden?

Aufgabe 060814:

In der Ebene ϵ liegen zwei voneinander verschiedene Punkte P_1 und P_2 und zwei voneinander verschiedene Geraden g_1 und g_2.

Ermittle alle Punkte X mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\overline{XP_1} = \overline{XP_2}$

(2) Die Abstände des Punktes X von g_1 bzw. g_2 sind einander gleich.

Hinweis: Beachte die verschiedenen Fälle!

6. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 060811:

Bezeichnet man den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC mit I_{F_1}, die Flächeninhalte der im Innern des Dreiecks gelegenen Kreisausschnitte mit I_{F_2} und I_{F_3}, dann gilt für den gesuchten Flächeninhalt I_F:

$$I_F = I_{F_1} - (I_{F_2} + I_{F_3}).$$

Bezeichnet M den Mittelpunkt von AB, so hat das Dreieck ΔABC die Höhe MC, ihre Länge beträgt $\frac{7}{2}$ cm. Daher gilt für I_{F_1}:

$$I_{F_1} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{7}{2}\text{cm}^2 = \frac{49}{4}\text{cm}^2.$$

Die beiden Kreisausschnitte mit den Flächeninhalten I_{F_2} und I_{F_3} lassen sich zu einem Viertelkreis zusammenlegen. Also gilt $I_{F_2} + I_{F_3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{49}{4}\pi\text{cm}^2$. Mithin gilt für I_F:

$$I_F = I_{F_1} - (I_{F_2} + I_{F_3}) = \frac{49}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\text{cm}^2 \approx 2,63\text{cm}^2.$$

Der Flächeninhalt der in der Abbildung schraffiert gezeichneten Fläche beträgt also $I_F \approx 2,63\text{cm}^2$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 060812:

Aus x kg Milch erhält man $\frac{21}{100}x$ kg Rahm und daraus $\frac{23}{100} \cdot \frac{21}{100}x$ kg Butter.

Aus der Gleichung $\frac{23\cdot 21}{100\cdot 100}x = 1$ folgt $x = \frac{10\,000}{21\cdot 23} = \frac{10\,000}{483}$.

Wegen $20,7 < \frac{10\,000}{483} < 20,8$ ist bei Berücksichtigung von genau einer Stelle nach dem Komma 20,8 kg Milch die kleinste Menge, die ausreicht, um mit dem angegebenen Verfahren 1 kg Butter zu gewinnen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 060813:

B hat zunächst einen Vorsprung von 500 m. In der gleichen Zeit, in der A 500 m zurücklegt, legt B nur 450 m zurück. A holt bei also 50 m auf. Insgesamt muß er 500 m aufholen. Das schafft er unter den Bedingungen der Aufgabe in genau 5 Runden.

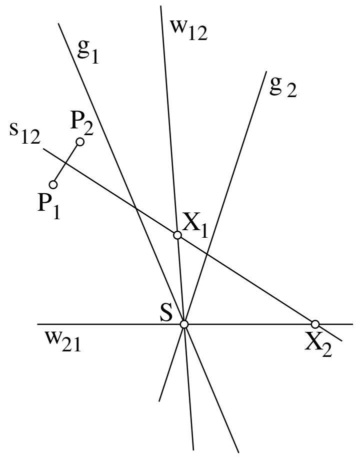
Die Gesamtlänge des Weges beträgt bei 5 Runden 5 km. Daher wird B von A in 6 Minuten eingeholt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 060814:

1. Fall:

Die Geraden g_1 und g_2 schneiden einander im Punkt S. Dann liegen die gesuchten Punkte X wegen (1) auf der Symmetrieachse s_{12}, zu P_1P_2 und wegen (2) auf einer der beiden Halbierenden w_{12} bzw. w_{21} der Schnittwinkel von g_1 und g_2. Für die Lage von s_{12} sind folgende Fälle zu unterscheiden: *Fall 1.1:* Es sei $s_{12} \parallel w_{12}$ oder $s_{12} \parallel w_{21}$.



Dann gibt es für $g_{12} \neq w_{12}$ bzw. für $s_{12} \neq w_{21}$ jeweils genau einen derartigen Punkt X, nämlich den Schnittpunkt von s_{12} mit w_{21} bzw. den Schnittpunkt von s_{12} mit w_{12}.

Für $s_{12} = w_{12}$ bzw. $s_{12} = w_{21}$ erfüllen alle Punkte von w_{12} bzw. von w_{21} und nur diese die Bedingungen (1) und (2). *Fall 1.2:* Es sei s_{12} zu keiner der beiden Winkelhalbierenden parallel.

Dann schneidet s_{12} entweder beide Winkelhalbierenden im Punkt S, und genau S erfüllt (1) und (2), oder s_{12} hat mit w_{12} den Punkt X_1 und mit w_{21} den Punkt X_2 gemeinsam ($X_1 \neq X_2$), wobei X_1 und X_2 und nur diese Punkte die Bedingungen (1) und (2) erfüllen.

2. Fall:

Die Geraden g_1 und g_2 sind zueinander parallel. Die gesuchten Punkte X liegen dann wegen (1) auf der Symmetrieachse s_{12} zu P_1P_2 und wegen (2) auf der Mittelparallelen m_{12} zu g_1 und g_2. Verläuft s_{12} nicht parallel zu m_{12}, so gibt es genau einen Punkt X, den Schnittpunkt von s_{12} und m_{12}, der (1) und (2) erfüllt. Für $s_{12} \parallel m_{12}$ erfüllen alle Punkte der Mittelparallelen und nur diese (1) und (2), falls $s_{12} = m_{12}$ gilt. Andernfalls gibt es keinen derartigen Punkt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Quellenverzeichnis

(15) "a+b = b+a" - Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.