2. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Saison 1962/1963

Aufgaben und Lösungen

2. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021241:

a) Beweisen Sie, daß der Rest bei der Division einer beliebigen Primzahl durch 30 entweder 1 oder eine Primzahl ist!

b) Gilt das auch bei der Division einer Primzahl durch 60? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 021242:
Für welche Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ gilt

$$\frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{2\cot 2x}{\cot x} \leq 1\,?$$

Aufgabe 021243:
Es ist zu beweisen: Wenn mindestens zwei unter den reellen Zahlen a, b, c von Null verschieden sind, so gilt die Ungleichung

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Unter welchen Bedingungen tritt Gleichheit ein?

Aufgabe 021244:
Gegeben sei ein Rechteck mit den Seiten $2a$ und $2b$, wobei $a > b$ ist. Von diesem Rechteck sollen vier kongruente rechtwinklige Dreiecke (an jeder Ecke ein Dreieck, dessen Katheten auf den Rechteckseiten liegen) so abgeschnitten werden, daß die Restfigur ein Achteck mit gleich langen Seiten bildet.

Die Seite des Achtecks ist durch a und b auszudrücken und aus a und b zu konstruieren. Außerdem ist anzugeben, unter welchen Bedingungen die Aufgabe lösbar ist.

Aufgabe 021245:
Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Eine Strecke PQ von der Länge p, wobei $p < a$ ist, bewegt sich so, daß ihre Endpunkte stets auf den Seiten des Quadrats liegen.

Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken PQ?

Aufgabe 021246:

Gegeben sei eine Pyramide $ABCD$, deren Grundfläche ABC ein Dreieck ist. Durch einen Punkt M der Kante DA werden in der Ebene der Flächen DAB bzw. DAC die Geraden MN bzw. MP so gezogen, daß N auf DB und P auf DC liegen und $ABNM$ sowie $ACPM$ Sehnenvierecke sind.

a) Beweisen Sie, daß auch $BCPN$ ein Sehnenviereck ist!

b) Beweisen Sie, daß die Punkte A, B, C, M, N, P auf einer Kugel liegen!

2. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 021241:

a) Jede Primzahl p lässt sich folgendermaßen schreiben:

   $p = 30q + r$, q und r natürliche Zahlen mit $1 \leq r \leq 29$. Für alle Zahlen r, die durch 2, 3, oder 5 teilbar sind, ist $30q + r$ keine Primzahl. Daher kommen nur die Zahlen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 als Rest r in Frage, d. h., r ist entweder gleich 1 oder eine Primzahl.

b) Jede Primzahl p lässt sich folgendermaßen schreiben:

   $p = 60q + r$, q und r natürliche Zahlen mit $1 \leq r \leq 59$. Da sich die Primzahl 109 in der Form $109 = 60 \cdot 1 + 49$ schreiben lässt und da 49 keine Primzahl ist, gilt die Aussage von a) nicht für b).

Aufgeschrieben von Burkhard Thiele – Quelle: (2)

Lösung 021242:

Zuerst kann man mit $\cot x = 1/\tan x$ und $\tan 2x = 2\tan x/(1 - \tan^2 x)$ die Ungleichung umformen zu

$$0 \leq 1 - \frac{2}{1 - \tan^2 x} + 2\,\frac{1 - \tan^2 x}{2} = f(x)$$

($f(x)$ dient als Abkürzung des Ausdrucks).

Zuerst betrachtet man die zugehörige Gleichung, um alle Nulldurchgänge zu finden. Durch die Substitution $z = 1 - \tan^2 x$ erhält man die quadratische Gleichung $zf(x) = z^2 + z - 2 = 0$, die die Lösungen -2 und 1 besitzt. Daraus folgt, dass das Gleichheitszeichen in der Ungleichung bei $x = \pi/3$ und $x = 2\pi/3$ gilt (es gilt auch bei $x = 0$ und $x = \pi$, was aber nicht im gewünschten Intervall liegt).

Weiterhin stellt man fest, dass die Ungleichung bei $x \in \{\pi/4, \pi/2, 3\pi/4\}$ nicht definiert ist. Da $f(x)$ auf dem Rest des Intervalls $(0, \pi)$ stetig ist, wechselt das Vorzeichen der Funktion nur an Nullstellen und an Stellen, wo sie nicht definiert ist. Es reicht also, aus jedem Teilintervall einen Punkt zu überprüfen. Zum Beispiel ist im Intervall $(0, \pi/4)$ der Wert $f(\pi/6) = -4/3$ und f somit überall negativ; die Ungleichung ist hier nicht erfüllt. Auf $(\pi/4, \pi/3)$ (mit der obigen Substitution: $z \in (-2, 0)$) nutzt man $zf(x) < 0$, um daraus $f(x) > 0$ zu folgern.

Ähnlich geht man auch mit den anderen Intervallen vor und findet, dass die Ungleichung auf der Menge gilt:

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \quad \cup \quad \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (11)

Lösung 021243:

Angenommen, alle drei Zahlen a, b, c sind von null verschieden. Dann sind die drei Nenner auf der linken Seite der vorgelegten Ungleichung positiv und wir können die Ungleichung vom Arithmetischen und Harmonischen Mittel hinschreiben:

$$[(b^2+c^2)+(c^2+a^2)+(a^2+b^2)]\left(\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)\geq 9,$$
$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)\geq \frac{9}{2}.$$

Multiplizieren wir das Produkt auf der linken Seite der Ungleichung aus, bleibt gerade unser Term und ein Summand $1+1+1=3$ übrig:

$$\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2}+\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\right)\geq \frac{9}{2}$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\geq \frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.$$

Ist dagegen eine Zahl gleich null (etwa a), vereinfacht sich die Ungleichung auf $\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}\geq 2>\frac{3}{2}$, welche wegen

$$\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)^2=\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}-2\geq 0$$

ebenfalls eine wahre Aussage ist. □

Gleichheit tritt in der Ungleichung vom Arithmetischen und Harmonischen Mittel genau dann ein, wenn alle Größen untereinander gleich sind: $b^2+c^2=c^2+a^2=a^2+b^2$. Diese Bedingungen sind äquivalent mit $a=b=c$.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021244:

Die Kathetenlängen der abgeschnittenen rechtwinkligen Dreiecksflächen werden mit x und y und die Hypotenusenlänge, die gleich der zu berechnenden Seitenlänge des Achtecks ist, werde mit c bezeichnet.

Dann gilt:

$$2x+c=2a, \quad \text{d.h.} \quad x=\frac{2a-c}{2}, \tag{1}$$
$$2y+c=2b, \quad \text{d.h.} \quad y=\frac{2b-c}{2}, \quad \text{und} \tag{2}$$
$$x^2+y^2 = c^2, \tag{3}$$

also wegen (1), (2) und (3)

$$\frac{(2a-c)^2}{4}+\frac{(2b-c)^2}{4}=c^2, \quad \text{woraus}$$
$$c^2+2(a+b)c-2(a^2+b^2)=0 \quad \text{folgt.}$$

Hieraus ergibt sich, daß entweder

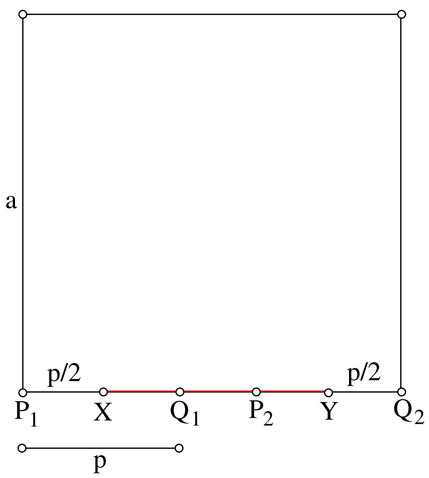
$$c=-(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+2(a^2+b^2)} \quad \text{oder} \tag{4}$$
$$c=-(a+b)-\sqrt{(a+b)^2+2(a^2+b^2)} \tag{5}$$

sein muß. Da a, b und c positiv sind, kann c nicht der Relation (5) genügen. Falls die Konstruktion überhaupt möglich ist, muß c die Bedingung (4) erfüllen.

Bemerkung: Die Konstruktion ist genau dann möglich, wenn $c < 2 \cdot \min(a, b)$ ist, d.h. wenn $\max(a, b) < 3 \cdot \min(a, b)$ ausfällt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 021245:



Für jede Seite gilt, daß der gesuchte geometrische Ort auf der Quadratseite liegt, wenn sich P von einer Ecke des Quadrates (im Bild mit P_1 bezeichnet) weg bewegt und Q noch nicht bei der nächsten Ecke (im Bild mit Q_2 bezeichnet) des Quadrates angekommen ist.

Dann befindet sich der erstmögliche gesuchte Punkt X auf dieser Quadratseite wie im Bild dargestellt in einer Entfernung von der Ecke P_1 von $\frac{p}{2}$. Der letztmögliche gesuchte Punkt Y auf dieser Quadratseite befindet sich in einer Entfernung von der nächsten Ecke Q_2 von ebenfalls $\frac{p}{2}$.

Eine solche Strecke XY muß existieren, da gilt:

$$a = P_1Q_2 = P_1X + XY + YQ_2 = \frac{p}{2} + XY + \frac{p}{2} = p + XY.$$

Da $a > p$ gilt demzufolge $XY > 0$.

Mit dieser Argumentation kann jede Quadratseite separat betrachtet werden und enthält in jedem Fall den geometrischen Ort, der sich zwischen den Abständen, der größer oder gleich $\frac{p}{2}$ zu beiden Ecken der betrachteten Quadratseite ist, befindet.

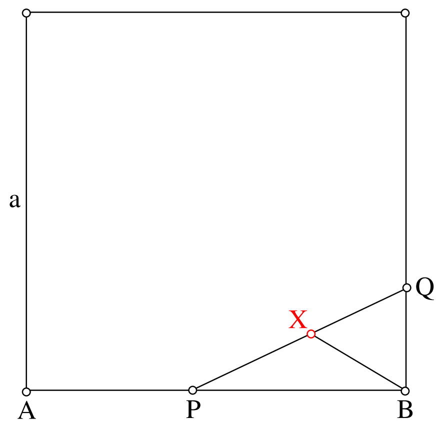
Nun wird der Fall betrachtet, der sich dann abspielt, wenn P auf einer und Q auf einer benachbarten Quadratseite entlanglaufen. Dann gelten die Bezeichnungen der zweiten Abbildung.

Da $p < a$ ist offensichtlich, daß P und Q nie auf gegenüberliegenden Seiten entlanglaufen können. Es sind also immer benachbarte Quadratseiten, die betrachtet werden müssen, wenn der zuerst beschriebene Fall nicht mehr zutrifft.

Benachbarte Quadratseiten umschließen einen Winkel von 90°; die Ecke zwischen P und Q sei o.B.d.A. B, somit ist ΔPBQ immer rechtwinklig.

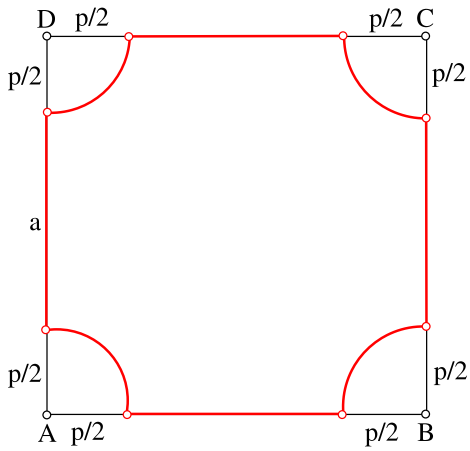
Damit ist PQ der Durchmesser eines Thaleskreises, auf dem B liegt. Da X die Strecke PQ halbiert, ist X Mittelpunkt des Kreises und es gilt für den Radius r des Thaleskreises: $r = PX = QX = BX$.

Da stets $P_iQ_i = p$ gilt, ist für jede Lage in diesem betrachteten Fall (beide Punkte auf verschiedenen Quadratseiten) $\frac{p}{2} = r_i = P_iX_i = Q_iX_i = BX_i$.



Damit ist der Viertelkreis um B mit dem Radius $\frac{p}{2}$ innerhalb des Quadrates der gesuchte geometrische Ort.

Faßt man beide Fälle zusammen, ergibt sich folgende Figur als gesuchter geometrischer Ort (rot):



Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 021246:

a) Da $ABNM$ und $ACPM$ Sehnenvierecke sind, liegen A, B, N, M sowie A, C, P, M jeweils auf einem Kreis. Die durch D, M, A und D, N, B und D, P, C gehenden Geraden sind Sekanten dieser Kreise.

Nach dem Sekantensatz gilt

$$\begin{aligned} |DM|\cdot|DA| &= |DN|\cdot|DB| \quad \text{und} \\ |DM|\cdot|DA| &= |DP|\cdot|DC| \quad \text{also} \\ |DN|\cdot|DB| &= |DP|\cdot|DC|. \end{aligned}$$

Daher liegen nach Umkehr des Sekantensatzes die Punkte N, B, C, P auf einem und demselben Kreis und, da nach Aufgabenstellung $NBCP$ ein Viereck ist, ist es ein Sehnenviereck.

b) Sind M_1 bzw. M_2 die Mittelpunkte der Umkreise von $ABNM$ bzw. $ACPM$, r_1 und r_2 ihre Radien und g_1 bzw. g_2 die Senkrechten zu ϵ_{ABM} durch M_1 bzw. zu ϵ_{ACM} durch M_2, so gilt

$$|QA| = |QB| = |QM| = |QN| = \sqrt{|QM_1|^2 + r_1^2} \text{ für alle } Q \in g_1 \tag{1}$$

$$|QA| = |QC| = |QM| = |QP| = \sqrt{|QM_2|^2 + r_2^2} \text{ für alle } Q \in g_2. \tag{2}$$

Daher liegt sowohl g_1 als auch g_2 in der zu AM senkrechten Ebene ϵ durch den Mittelpunkt von AM. Weil $\epsilon_{ABM} \neq \epsilon_{ACM}$ ist, gilt auch $g_1 \neq g_2$. Folglich haben g_1 und g_2 einen Schnittpunkt O. Für ihn gilt wegen (1) und (2)

$$|OA| = |OM| = |OB| = |ON| = |OC| = |OP|.$$

Also liegen A, B, C, M, N, P auf der Kugel um O mit dem Radius OA.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag