# 24. Mathematik Olympiade
# 2. Stufe (Kreisolympiade)
# Klasse 12
# Saison 1984/1985

Aufgaben

# 24. Mathematik-Olympiade
## 2. Stufe (Kreisolympiade)
## Klasse 12
## Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

### Aufgabe 241221:

Es sei $(a_n)$ diejenige Zahlenfolge, für die $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 1}{a_n + 1}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ gilt.

a) Berechnen Sie $a_2$ und $a_3$, und beweisen Sie, daß $a_n > 1$ für alle $n = 1, 2, 3, ...$ gilt!

b) Beweisen Sie, daß die Folge $(a_n)$ streng monoton fallend ist!

### Aufgabe 241222:

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 6 = 9xy \qquad (1)$$

$$(x + y)^2 = 36. \qquad (2)$$

### Aufgabe 241223:

Man prüfe, ob es eine natürliche Zahl $n$ und ganze Zahlen $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$ gibt, so daß für

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$$

sowohl $p(7) = 1\,985$ als auch $p(3) = 1\,984$ gilt.

### Aufgabe 241224:

a) Beweisen Sie, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck für die Seitenlängen $a$, $b$, $c$ und die Höhenlängen $h_a$, $h_b$, $h_c$ die Ungleichung

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\left(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2\right) \quad \text{gilt!} \qquad (1)$$

b) Untersuchen Sie, ob (1) auch in jedem spitzwinkligen Dreieck gilt!

Gibt es a) rechtwinklige, b) spitzwinklige Dreiecke, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt?