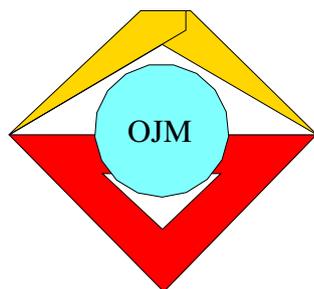




24. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1984/1985

Aufgaben





24. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 241221:

Es sei (a_n) diejenige Zahlenfolge, für die $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{a_n + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) gilt.

- a) Berechnen Sie a_2 und a_3 , und beweisen Sie, daß $a_n > 1$ für alle $n = 1, 2, 3, \dots$ gilt!
- b) Beweisen Sie, daß die Folge (a_n) streng monoton fallend ist!

Aufgabe 241222:

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 6 = 9xy \tag{1}$$

$$(x + y)^2 = 36. \tag{2}$$

Aufgabe 241223:

Man prüfe, ob es eine natürliche Zahl n und ganze Zahlen a_0, a_1, \dots, a_n gibt, so daß für

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

sowohl $p(7) = 1985$ als auch $p(3) = 1984$ gilt.

Aufgabe 241224:

- a) Beweisen Sie, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck für die Seitenlängen a, b, c und die Höhenlängen h_a, h_b, h_c die Ungleichung

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \quad \text{gilt!} \tag{1}$$

- b) Untersuchen Sie, ob (1) auch in jedem spitzwinkligen Dreieck gilt!

Gibt es a) rechtwinklige, b) spitzwinklige Dreiecke, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt?