Umlauft

**34. Mathematik-Olympiade**
**4. Stufe (Deutschland-Olympiade)**
**Aufgaben**
**Klassen 11-13**
**1. Tag**

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

341341

Man beweise: Wenn für eine von Null verschiedene reelle Zahl $x$ die Zahl $x+\frac{1}{x}$ eine ganze Zahl ist, dann ist für dieses $x$ und jede positive ganze Zahl $n$ auch $x^n+\frac{1}{x^n}$ eine ganze Zahl.

341342

Im Innern eines gleichseitigen Dreiecks $ABC$ werde ein Punkt $P$ beliebig gewählt. Die Fußpunkte der Lote von $P$ auf die Seiten $BC$, $CA$, $AB$ seien in dieser Reihenfolge mit $X$, $Y$, $Z$ bezeichnet.
Man beweise, daß die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $BXP$, $CYP$, $AZP$ nicht von der Wahl des Punktes $P$ abhängt.

341343

Man beweise, daß für alle ganzen Zahlen $k$ und $n$ mit $1 \leq k \leq 2n$ die Ungleichung

$$\binom{2n+1}{k-1}+\binom{2n+1}{k+1} \geq 2\cdot\frac{n+1}{n+2}\cdot\binom{2n+1}{k}$$

gilt.

Hinweis: Für ganze Zahlen $n$ und $k$ mit $0 \leq k \leq n$ definiert man

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!},$$

wobei für ganze Zahlen $m$ mit $m \geq 0$ definiert wird: $m! = 1\cdot 2\cdot \cdots \cdot m$
(ausführlicher: $0!=1$ sowie $m!=(m-1)!\cdot m \quad (m=1,2,3,\ldots)$ ).

Umlauft

**34. Mathematik-Olympiade**
**4. Stufe (Deutschland-Olympiade)**
**Aufgaben**
**Klassen 11-13**
**2. Tag**

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

341344

Über ein Dreieck $ABC$ und zwei Punkte $D,E$ werde vorausgesetzt:

$D$ liegt auf der Strecke $BC$ und ist von $C$ verschieden, $E$ liegt auf der Strecke $AC$ und ist von $C$ verschieden.

Die Strecke $DE$ geht durch den Inkreismittelpunkt $M$ des Dreiecks $ABC$.

Der Inkreisradius des Dreiecks $ABC$ sei $r$, der Flächeninhalt des Dreiecks $CDE$ sei $F$.

Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets $F \geq 2r^2$ gilt.

341345

Man ermittle alle diejenigen Paare $(x;y)$ nichtnegativer ganzer Zahlen $x$, $y$, für die $x^3+8x^2-6x+8=y^3$ gilt.

**Von den nachstehenden Aufgaben 341346 A und 341346 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:**

341346 A

Zu gegebenen positiven ganzen Zahlen $a$ und $b$ sei $(x_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ diejenige Zahlenfolge, die durch

$$x_0 = 1,$$
$$x_{n+1} = ax_n + b \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

definiert ist.

Man beweise: Für jede Wahl von $a$ und $b$ enthält die so gebildete Folge unendlich viele Zahlen, die keine Primzahlen sind.

341346 B

Zwei Personen $P$ und $Q$ spielen das folgende Spiel: In der Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

belegt zunächst $P$, danach $Q$ und schließlich wieder $P$ je einen noch nicht belegten der drei Koeffizienten $a$, $b$, $c$ mit einer reellen Zahl. Das Spiel ist genau dann für $P$ gewonnen, wenn die so entstandene Gleichung drei paarweise verschiedene reelle Lösungen hat.

Man untersuche, ob $P$ bei jeder Spielweise von $Q$ den Gewinn erzwingen kann.

**34. Mathematik-Olympiade**
**4. Stufe (Deutschland-Olympiade)**
**Lösungen**
**Klassen 11-13**
**1. Tag**

341341 Lösung: 6 Punkte

I. Für $n=1$ ist die zu beweisende Aussage wahr; denn $x^1+\frac{1}{x^1}$ ist die als ganzzahlig vorausgesetzte Zahl $x+\frac{1}{x}$ selbst.

Für $n=2$ ist die zu beweisende Aussage ebenfalls wahr; denn wenn mit einer ganzen Zahl $g$ die Gleichung
$$x+\frac{1}{x}=g$$
gilt, so folgt
$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=g^2-2\ .$$

II. Wenn $n\geq 2$ ist und die zu beweisende Aussage sowohl für $n$ als auch für $n-1$ statt $n$ gilt, d.h. wenn aus $x+\frac{1}{x}=g$ mit einer ganzen Zahl $g$ auch mit zwei ganzen Zahlen $k$ und $h$ die Gleichungen
$$x^n+\frac{1}{x^n}=k\ ,\qquad x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}=h$$
folgen, so folgt
$$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)$$
$$=k\cdot g-h\ ;$$
d.h., es gilt auch die zu beweisende Aussage für $n+1$ statt $n$.

Mit I. und II. ist die zu beweisende Aussage für alle positiven ganzen Zahlen $n$ durch vollständige Induktion bewiesen.

2. Beweisweg: Nach dem binomischen Satz (der hier auch ohne genaue Angabe der Binomialkoeffizienten, nur unter Nutzung ihrer Ganzzahligkeit und Symmetrie, verwendet und in dieser Gestalt z.B. durch „wiederholtes Ausmultiplizieren" formuliert und begründet werden kann) gilt:
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$$
$$=x^n+\binom{n}{1}\cdot x^{n-1}\cdot\frac{1}{x}+\binom{n}{2}\cdot x^{n-2}\cdot\frac{1}{x^2}+\cdots+\binom{n}{n-2}\cdot x^2\cdot\frac{1}{x^{n-2}}+\binom{n}{n-1}\cdot x\cdot\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}\ .$$

Wegen der Symmetrie $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ kann man dabei folgendermaßen zusammenfassen:
Für ungerades $n=2m+1$ bzw. für gerades $n=2m$ ist

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$$

$$=x^n+\frac{1}{x^n}+\binom{n}{1}\cdot\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\binom{n}{2}\cdot\left(x^{n-4}+\frac{1}{x^{n-4}}\right)+\dots+\binom{n}{m-1}\cdot\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\binom{n}{m}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

bzw.

$$=x^n+\frac{1}{x^n}+\binom{n}{1}\cdot\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+\binom{n}{2}\cdot\left(x^{n-4}+\frac{1}{x^{n-4}}\right)+\dots+\binom{n}{m-1}\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\binom{n}{m}.$$

In einem Induktionsbeweis (Schluß von „alle $k<n$“ auf $n$) läßt sich daher $x^n+\frac{1}{x^n}$ additiv aus Zahlen gewinnen, die sämtlich nach Voraussetzung oder nach Induktionsannahme ganze Zahlen sind.

Bemerkung zu anderen Beweismöglichkeiten: Aus $x+\frac{1}{x}=g$ folgt: $x$ und $\frac{1}{x}$ sind in geeigneter Reihenfolge die beiden Zahlen $\frac{g}{2}\pm\sqrt{\frac{g^2}{4}-1}$ . Bildet man mit dem binomischen Satz ihre $n$-ten Potenzen und addiert diese, so fallen alle Quadratwurzelterme weg.
Ist $g$ gerade, so ist damit die Ganzzahligkeit von $x^n+\frac{1}{x^n}$ bewiesen (hierauf z.B. bezieht sich im Punktverteilungsvorschlag die Möglichkeit eines „teilweise allgemeinen“ Nachweises); für ungerades $g$ ist dagegen noch mit zusätzlichem Aufwand zu beweisen, daß in der entstandenen Darstellung von $x^n+\frac{1}{x^n}$ der Nenner $2^n$ herausgekürzt werden kann.

341342 Lösung: 7 Punkte

Die Parallele durch $P$ zu $BC$ schneide $AB$ in $U$,
“ “ “ $P$ “ $CA$ “ $BC$ “ $V$,
“ “ “ $P$ “ $AB$ “ $CA$ “ $W$ (siehe Abb. L341342 a ).
Durch die Strecken $PU$, $PV$, $PW$ wird das Dreieck $ABC$ in die drei Trapeze $AUPW$, $BVPU$, $CWPV$ zerlegt.
Weiter sei $Q$ derjenige Punkt, für den $AZPQ$ ein Rechteck ist. Nach dem Kongruenzsatz sww ist $\Delta\, UPZ\cong\Delta\, WAQ$. Daher hat $AUPW$ denselben Flächeninhalt wie $AZPQ$, also doppelt so großen Flächeninhalt wie das Dreieck $AZP$ .
Ebenso folgt: $BVPU$ bzw. $CWPV$ haben doppelt so großen Flächeninhalt wie $BXP$ bzw. wie $CYP$ . Also ist die Summe der Flächeninhalte von $BXP$, $CYP$, $AZP$ gleich dem halben Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$ und damit unabhängig von der Wahl des Punktes $P$ .

<u>2.Lösungsweg:</u> Für je zwei Punkte $P$, $\widetilde{P}$ im Innern von $ABC$, für die Fußpunkte $X, Y, Z$ bzw. $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ der Lote von $P$ bzw. $\widetilde{P}$ auf $BC, CA, AB$ sowie für die Flächeninhalte $F_X$, $F_Y$, $F_Z$ bzw. $F_{\widetilde{X}}$, $F_{\widetilde{Y}}$, $F_{\widetilde{Z}}$ von $BXP, CYP, AZP$ bzw. von $B\widetilde{X}\widetilde{P}$, $C\widetilde{Y}\widetilde{P}$, $A\widetilde{Z}\widetilde{P}$ ist

$$F_X + F_Y + F_Z = F_{\widetilde{X}} + F_{\widetilde{Y}} + F_{\widetilde{Z}} \tag{1}$$

zu beweisen. Es genügt, den Beweis in dem Spezialfall zu führen, daß $P\widetilde{P}$ parallel zu einer Seite von $ABC$ ist; denn für den allgemeinen Fall genügt dann ein zweimaliges Anwenden dieses speziellen Beweises. Sei also etwa $P\widetilde{P} \parallel AB$ und dabei $P$ näher bei $A$ gelegen als $\widetilde{P}$ (siehe Abb. L341342 b ). Der Mittelpunkt von $P\widetilde{P}$ sei $Q$, die Fußpunkte der Lote von $Q$ auf $BC, CA, AB$ seien $U, V, W$. Die Flächeninhalte der Trapeze $\widetilde{X}XP\widetilde{P}$, $\widetilde{Y}YP\widetilde{P}$, $Z\widetilde{Z}\widetilde{P}P$ seien $T_X$, $T_Y$, $T_Z$, die Flächeninhalte der Dreiecke $AP\widetilde{P}$, $BP\widetilde{P}$, $CP\widetilde{P}$ seien $D_A$, $D_B$, $D_C$. Damit gilt

$$F_X = F_{\widetilde{X}} + T_X + D_B, \tag{2}$$

$$F_Y = F_{\widetilde{Y}} + T_Y - D_C, \tag{3}$$

$$F_Z = F_{\widetilde{Z}} + D_A - T_Z. \tag{4}$$

Wegen $P\widetilde{P} \parallel AB$ ist

$$D_A = D_B = \frac{1}{2} T_Z, \tag{5}$$

ferner beweist man, daß

$$D_C = T_X + T_Y \tag{6}$$

gilt: Als bekannter Sachverhalt (z.B. aus der Olympiade-Aufgabe 341322 ) kann nämlich zitiert werden, daß $\overline{QU} + \overline{QV} + \overline{QW}$ unabhängig von der Lage des Punktes $Q$ in $ABC$ ist. Also ist $\overline{QU} + \overline{QV}$ gleich der Länge der auf $P\widetilde{P}$ senkrechten Höhe des Dreiecks $CP\widetilde{P}$; somit gilt $D_C = \frac{1}{2}\overline{P\widetilde{P}} \cdot \left(\overline{QU} + \overline{QV}\right)$. Wegen $\overline{\angle \widetilde{P}PX} = 30^\circ$ ist ferner $\overline{X\widetilde{X}} = \frac{1}{2}\overline{P\widetilde{P}}$ und damit $T_X = \frac{1}{2}\overline{P\widetilde{P}} \cdot \overline{QU}$; ebenso folgt $T_Y = \frac{1}{2}\overline{P\widetilde{P}} \cdot \overline{QV}$. Hiermit ist (6) bewiesen; aus (2)-(6) folgt (1).

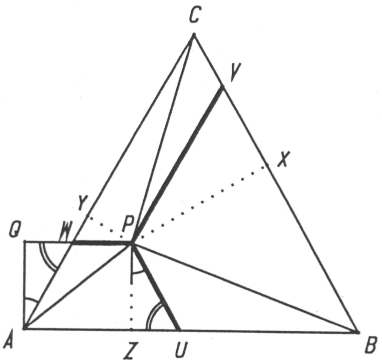


*Abb. L341342 a*

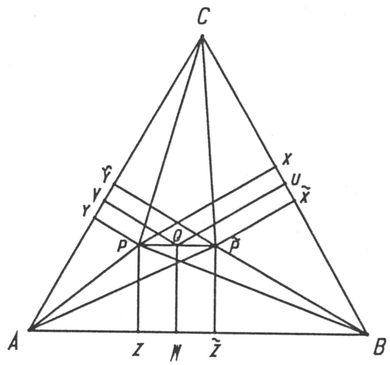


*Abb. L341342 b*

<u>341343 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Nach der Formel $\binom{n}{k+1}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\binom{n}{k}$, die als bekannter Sachverhalt zitiert oder aus der Definition (in Gestalt des Hinweises zum Aufgabentext oder in anderer Gestalt) hergeleitet werden kann, gilt

$$\binom{2n+1}{k+1}=\frac{2n-k+1}{k+1}\cdot\binom{2n+1}{k}, \qquad \binom{2n+1}{k}=\frac{2n-k+2}{k}\cdot\binom{2n+1}{k-1}.$$

Daher ist die zu zeigende Ungleichung bewiesen, wenn bewiesen ist, daß für $1\le k\le 2n$

$$\frac{k}{2n-k+2}+\frac{2n-k+1}{k+1}\ge 2\cdot\frac{n+1}{n+2} \qquad (1)$$

gilt. Nach Einführung von $h=n-k$ (mit $-n\le h\le n-1$ ) ist somit

$$\frac{n-h}{n+h+2}+\frac{n+h+1}{n-h+1}\ge 2\cdot\frac{n+1}{n+2} \qquad (2)$$

zu beweisen. Dies kann folgendermaßen geschehen: Mit der Abkürzung

$$f(h)=\frac{n-h}{n+h+2}+\frac{n+h+1}{n-h+1}$$

gilt erstens
$$f(0)=\frac{n}{n+2}+1=\frac{2n+2}{n+2},$$

also (2) für $h=0$ sogar mit dem Gleichheitszeichen. (Diese Feststellung, auch in der Gestalt, daß in (1) für $k=n$ das Gleichheitszeichen gilt, konnte als Motivation dienen, dort $h=n-k$ einzuführen und damit zu (2) überzugehen. Natürlich kann man auch ohne derartiges Einführen einer neuen Variablen vorgehen, auch in den nachfolgenden Beweisschritten, „nur" haben sie dann kompliziertere Gestalt und sind schwieriger zu finden.)

Zweitens gilt:

$$f(h+1)-f(h)$$

$$=\frac{(n-h-1)(n+h+2)-(n-h)(n+h+3)}{(n+h+3)(n+h+2)}+\frac{(n+h+2)(n-h+1)-(n+h+1)(n-h)}{(n-h)(n-h+1)}$$

$$=\frac{-2n-2}{(n+h+3)(n+h+2)}+\frac{2n+2}{(n-h)(n-h+1)}=\frac{2(n+1)\cdot(4hn+4n+6h+6)}{(n+h+3)(n+h+2)(n-h)(n-h+1)}$$

$$=\frac{4(n+1)(2n+3)(h+1)}{(n+h+3)(n+h+2)(n-h)(n-h+1)}. \qquad (3)$$

Wegen $n\ge 1$ und $-n\le h\le n-1$ erhält man: In (3) sind im Fall $h\ge 0$ alle Faktoren positiv, also folgt
$$f(0)<f(1)<\cdots<f(n-1);$$
in den Fällen $h=-1$ bzw. $h<-1$ wird der Faktor $h+1$ gleich Null bzw. negativ, während alle anderen Faktoren positiv bleiben, also folgt
$$f(0)=f(-1)<f(-2)<\cdots<f(-n).$$
Damit ist (2) und folglich die zu zeigende Ungleichung bewiesen.

Andere Lösungsmöglichkeiten:

1. Statt wie eben Differenzen zu verwenden, kann man zur *Funktion f, für reelles h definiert*, übergehen und diese durch Vorzeichendiskussion ihrer Ableitung als streng monoton fallend in $\left[-n, -\frac{1}{2}\right]$, streng monoton steigend in $\left[-\frac{1}{2}, n-1\right]$ nachweisen. Entsprechend, „nur" rechnerisch komplizierter, ist zu (1) eine Funktion für reelles $k$ verwendbar.

2. Wie soeben (oder aus $f(0) = f(-1)$ bzw. aus dem Gleichheitszeichen in (1) sowohl für $k = n$ als auch für $k = n+1$) ersichtlich, wird noch mehr Symmetrie durch Einführung von $m = n - k + \frac{1}{2}$ erreicht. Das hiernach zu zeigende

$$\frac{2n-2m+1}{2n+2m+3} + \frac{2n+2m+1}{2n-2m+3} \geq 2 \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

ergibt sich aus $$\frac{8n^2+8m^2+16n+6}{(2n+2m+3)(2n-2m+3)} - \frac{2(n+1)}{n+2} \geq 0,$$

d.h. $$\frac{16m^2n+24m^2-4n-6}{(2n+2m+3)(2n-2m+3)(n+2)} \geq 0;$$

denn wegen der Ganzzahligkeit von $n$ und $k$ ist $|m| \geq \frac{1}{2}$, also $m^2 \geq \frac{1}{4}$ und daher $16m^2n + 24m^2 \geq 4n+6$.

## Vorschläge zur Punktverteilung

341341

| | |
|---|---|
| Bestätigung für einzelne Werte (z.B. als Induktionsanfang): maximal | 2 |
| Weitere vollständige Beweisführung | 4 |
| | 6 |

Bei nur teilweise allgemeinem Nachweis sind maximal 3 von 6 Punkten als angemessen anzusehen.

341342

| | |
|---|---|
| Zum Beweis verwendbarer Ansatz (z.B. Zerlegung in Trapeze oder Spezialfall $P\tilde{P} \parallel AB$) | 3 |
| Ausführung des Beweises | 4 |
| | 7 |

341343

| | |
|---|---|
| Zurückführung auf die Ungleichung (1) | 2 |
| Nachweis dieser Ungleichung | 5 |
| | 7 |

**34. Mathematik-Olympiade**
**4. Stufe (Deutschland-Olympiade)**
**Lösungen**
**Klassen 11-13**
**2. Tag**

341344 Lösung: 7 Punkte

Es seien $L$ sowie $P$ bzw. $Q$ die Fußpunkte der Lote von $D$ auf die Gerade durch $A$, $C$ sowie von $M$ auf $BC$ bzw. auf $AC$ (siehe Abb. L341344 a ). Für den Flächeninhalt $F$ des Dreiecks $CDE$ gilt dann einerseits

$$F=\frac{1}{2}\cdot\overline{CE}\cdot\overline{DL}\ , \tag{1}$$

andererseits $$F=\frac{1}{2}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{MP}+\frac{1}{2}\cdot\overline{CE}\cdot\overline{MQ}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overline{CD}+\overline{CE}\right)\cdot r\ ,$$

nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel sowie wegen des rechten Winkels bei $L$ und wegen (1) also

$$F\geq r\cdot\sqrt{\overline{CD}\cdot\overline{CE}}\geq r\cdot\sqrt{\overline{DL}\cdot\overline{CE}}=r\cdot\sqrt{2F}\ .$$

Da $r$ und $F$ positiv sind, folgt hieraus $F^2\geq r^2\cdot 2F$ und damit, wie behauptet, $F\geq 2r^2$.

2.Lösungsweg (Motiv: Vergleich mit gleichschenkligem und dann mit gleichschenklig-rechtwinkligem Dreieck):

Die in $M$ auf $CM$ errichtete Senkrechte schneide die Gerade durch $B$, $C$ in $D_0$ und die Gerade durch $A$, $C$ in $E_0$. Da $CM$ den Winkel $\angle ACB$ halbiert, folgt aus dem Kongruenzsatz **sww**, daß $\Delta\, CMD_0\cong\Delta\, CME_0$ gilt.

Durch eventuelle Vertauschung der Bezeichnungen $A$, $E$, $E_0$ mit $B$, $D$, $D_0$ kann erreicht werden, daß $D_0$ auf der Strecke $CD$ und folglich $E$ auf der Strecke $CE_0$ liegt (siehe Abb. L341344 b ). Für die Fußpunkte $H, K$ der Lote von $D, E$ auf die Gerade durch $D_0$, $E_0$ gilt dann: $D_0$ liegt auf der Strecke $MH$; $K$ liegt auf der Strecke $ME_0$. Wegen $\overline{MD_0}=\overline{ME_0}$ ist folglich $\overline{MH}\geq\overline{MK}$ und nach dem Strahlensatz daher $\overline{DH}\geq\overline{EK}$.

Für die Flächeninhalte $F$, $F_0$, $F_1$, $F_2$ der Dreiecke $CDE$, $CD_0E_0$, $MDD_0$, $MEE_0$ gilt also $F_1\geq F_2$ und damit

$$F=F_0+F_1-F_2\geq F_0\ . \tag{2}$$

Ist ferner $U$ der Mittelpunkt von $CD_0$, so ist wegen $\overline{\angle CMD_0}=90^\circ$ nach der Umkehrung des Thalessatzes sowie wegen des (im Fall $P\neq U$ ) bei $P$ rechtwinkligen Dreiecks $MPU$

$$\overline{UC}=\overline{UD_0}=\overline{UM}\geq\overline{PM}=r$$

und daher $$F_0=\overline{CD_0}\cdot\overline{PM}=\left(\overline{UC}+\overline{UD_0}\right)\cdot r\geq(r+r)\cdot r\ . \tag{3}$$

(Bemerkung: Die Ungleichung $\overline{UM}\geq\overline{PM}$ ist wegen des Höhensatzes $\overline{PM}=\sqrt{\overline{PC}\cdot\overline{PD_0}}$ gleichbedeutend mit der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel.)

Aus (2) und (3) folgt die behauptete Ungleichung.

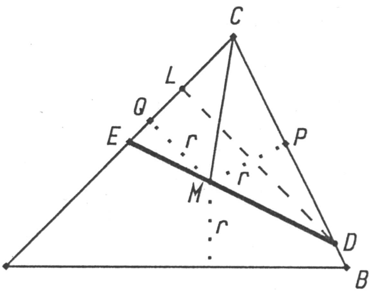


*Abb. L341344 a*

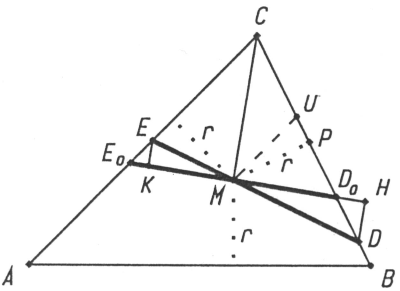


*Abb. L341344 b*

<u>341345 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

I. Wenn ein Paar $(x;y)$ nichtnegativer ganzer Zahlen die Gleichung

$$x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3 \tag{1}$$

erfüllt, so folgt: Es gilt einerseits

$$y^3 - (x+1)^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8 - \left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right)$$

$$= 5x^2 - 9x + 7 = 5 \cdot \left(\left(x - \frac{9}{10}\right)^2 + \frac{59}{100}\right) > 0\ , \tag{2}$$

andererseits $\quad (x+3)^3 - y^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - \left(x^3 + 8x^2 - 6x + 8\right)$

$$= x^2 + 33x + 19 > 0\ . \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt $x+1 < y < x+3$, wegen der Ganzzahligkeit also $y = x+2$. Damit geht (1) über in

$$x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8\ ,$$

$$2x(x-9) = 0\ ,$$

also ist entweder $x = 0$ oder $x = 9$ und hierzu jeweils $y = 2$ bzw. $y = 11$.

II. Für diese Werte ist wegen

$$0^3+8\cdot 0^2-6\cdot 0+8 = 8 = 2^3$$

bzw. $$9^3+8\cdot 9^2-6\cdot 9+8 = 729+648-54+8 = 1331 = 11^3$$

die Gleichung (1) erfüllt.

Mit I. und II. ist bewiesen, daß genau die beiden Paare (0;2) und (9;11) den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Bemerkungen: Den Ansatz (2),(3) kann man mit der Überlegung motivieren, daß $y=x+g$ mit einer ganzen Zahl $g$ gelten muß und daß Terme der Form $y^3-(x+g)^3$ nach (1) von der Form $ax^2+bx+c$ sind und daher möglicherweise (nämlich im Fall $4ac-b^2\geq 0$ ) generelle Abschätzungen gestatten. Durch probeweises Berechnen dieser Terme etwa für $g=1,2,3$ gelangt man zu (2),(3).

Die Ungleichung $5x^2-9x+7>0$ kann auch z.B. so bewiesen werden: Für $x=0$ und $x=1$ ist sie unmittelbar ersichtlich, für $x\geq 2$ folgt sie aus

$$5x^2-9x+7=5\cdot x\cdot(x-2)+x+7\geq 5\cdot 2\cdot 0+2+7\ .$$

341346 A Lösung: 6 Punkte

Die durch $x_0=1$ , $x_{n+1}=ax_n+b \quad (n=0,1,2,\ldots)$ definierte Folge $(x_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ ist wegen $a>0$ , $b>0$ streng monoton steigend. Daher genügt es, zu beweisen, daß eine natürliche Zahl $d>1$ existiert, für die folgendes gilt: Es gibt unendlich viele Indexwerte $n$, die die Bedingung erfüllen, daß $x_n$ durch $d$ teilbar ist. Ein solcher Beweis kann folgendermaßen geführt werden:

1. Falls $a$ und $b$ einen gemeinsamen Teiler $d>1$ haben, folgt unmittelbar durch (auch formal als vollständige Induktion beschreibbares) sukzessives Anwenden von $x_{n+1}=ax_n+b$, daß alle $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ , … durch $d$ teilbar sind.

2. Seien nun $a$ und $b$ zueinander teilerfremd. Für die Zahl $d=x_1$ gilt $d=ax_0+b$ $=a+b>1$ ; für diese Zahl (oder auch für irgend einen Teiler $d>1$ der Zahl $x_1$ ) sei jeweils $r_n$ (mit $0\leq r_n<d$) der Rest, den $x_n$ bei Division durch $d$ läßt. Da es nur $d$ Werte gibt, die ein solcher Rest annehmen kann, müssen zwei der $r_1$ , $r_2$ , … , $r_{d+1}$ einander gleich sein; es gibt also positive ganze Zahlen $e$ , $m$ mit $r_e=r_{e+m}$ . Ist dabei $e>1$, so folgt aus der Teilbarkeit von $x_{e+m}-x_e=a\cdot\left(x_{e+m-1}-x_{e-1}\right)$ durch $d$ und aus der Teilerfremdheit von $a$, $b$, also auch von $a$, $d$, daß auch $x_{e+m-1}-x_{e-1}$ durch $d$ teilbar ist, also $r_{e-1}=r_{e+m-1}$ gilt. Setzt man diese Schlußweise fort, so erhält man $r_1=r_{1+m}$ . Da nun stets, wenn zwei Folgenglieder $x_i$ , $x_j$ bei Division durch $d$ einander gleichen Rest lassen, dies auch für $x_{i+1}=ax_i+b$ und $x_{j+1}=ax_j+b$ zutrifft, ergibt sich sukzessiv $r_2=r_{2+m}$ , ⋯ , $r_{1+m}=r_{1+2m}$ , ⋯ . So weiterschließend erhält man $r_1=r_{1+k\cdot m}$ für alle $k=1,2,3,\ldots$ . Nach Definition von $d$ ist aber $r_1=0$ ; also besagt dieses Ergebnis: Für alle $k=1,2,3,\ldots$ ist $x_{1+k\cdot m}$ durch $d$ teilbar.

341346 B Lösung: 6 Punkte

Der Spieler $P$ kann den Gewinn erzwingen. Zum Beweis genügt es, ein Beispiel einer Strategie anzugeben, die $P$ in jedem Fall befolgen kann, und nachzuweisen, daß $P$ durch Befolgen dieser Strategie bei jeder Spielweise von $Q$ gewinnt. Ein solches Beispiel ist:

> $P$ wählt im ersten Zug $c = 1$.
> Wählt $Q$ dann einen Wert für $a$, so wählt $P$ in seinem zweiten Zug eine Zahl $b < -a - 2$ ; wählt aber $Q$ einen Wert für $b$, so wählt $P$ in seinem zweiten Zug eine Zahl $a < -b - 2$ .

Beweis, daß die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ hierbei drei paarweise verschiedene reelle Lösungen hat: Für die durch $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ definierte Funktion $f$ gilt: Wegen $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ gibt es eine Zahl $k > 1$ mit

$$f(k) > 0 , \qquad f(-k) < 0 . \tag{1}$$

(Formulierung und Gewinnung einer solchen Aussage sind auch vermittels anschaulicher Betrachtung des Funktionsgraphen zu akzeptieren.) Nach der Wahl von $c$ ist ferner

$$f(0) = 1 \tag{2}$$

und $f(1) = a + b + 2$ , so daß nach der anschließend erfolgten Wahl von $a$ und $b$ wegen der dabei erreichten Ungleichung $a + b + 2 < 0$ auch stets

$$f(1) < 0 \tag{3}$$

gilt. Aus (1), (2), (3) folgt nach dem Zwischenwertsatz, daß die Funktion $f$ je eine Nullstelle zwischen $-k$ und 0, zwischen 0 und 1 sowie zwischen 1 und $k$ hat. (Auch dieser Beweisschritt kann in anschaulicher Fassung akzeptiert werden.)

## Vorschläge zur Punktverteilung

341344

| | |
|---|---|
| Erster Teilschritt (z.B. $F$ durch $\overline{CE}$ , $\overline{CL}$ und durch $\overline{CD}$ , $\overline{CE}$ , $r$ ausgedrückt oder: Übergang zu gleichschenkligem Dreieck) | 3 |
| Weitere Beweisführung | 4 |
| | 7 |

341345

| | |
|---|---|
| Nachweis von $y = x + 2$ oder ähnlich nutzbarer Aussage | 3 |
| Ermittlung der Lösungen und Probe | 4 |
| | 7 |

341346 A

| | |
|---|---|
| Teiler-Angabe, ggf. nach Fallunterscheidung für unendlich viele Folgenglieder geeignet | 3 |
| Ausführung des Beweises der Teilbarkeit | 3 |
| | 6 |

341346 B

| | |
|---|---|
| Beschreibung einer Strategie | 2 |
| Nachweis der Existenz von drei paarweise verschiedenen reellen Lösungen | 4 |
| | 6 |