alpha 2-3/1995 S. 23 ff

Klassen 11-13 – 1. Tag

341331

Man beweise, daß für alle positiven reellen Zahlen x, y, z die Ungleichung

$$\frac{1}{1+x+\frac{1}{y}}+\frac{1}{1+y+\frac{1}{z}}+\frac{1}{1+z+\frac{1}{x}}\leq 1$$

gilt.

341332

Im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC werde ein Punkt P beliebig gewählt. Die Fußpunkte der Lote von P auf dieSeiten BC, CA, AB seien in dieser Reihenfolge mit X, Y, Z bezeichnet.

Man beweise, daß die Summe der Längen x, y, z der Strecken BX, CY, AZ nicht von der Wahl des Punktes P abhängt.

Von den nachstehenden Aufgaben 341333 A und 341333 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

341333 A

Man ermittle alle diejenigen Paare (x,y) reeller Zahlen x, y, die die folgenden Gleichungen (1) und (2) erfüllen:

$$\sin^4 x = y^4 + x^2y^2 - 4y^2 + 4\,, \qquad (1)$$

$$\cos^4 x = x^4 + x^2y^2 - 4x^2 + 1\,. \qquad (2)$$

341333 B

Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen definiert sind und für alle reellen x und y den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

1: $f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y) - f(x) - f(y) + 2,$

2: $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1\,,$

3: $f(1) = 2\,.$

Klassen 11-13 – 2. Tag

341334

Man ermittle die kleinste natürliche Zahl n mit $n \geq 2$ und der folgenden Eigenschaft (*):

(*) In jeder Menge von n natürlichen Zahlen gibt es (mindestens) zwei Zahlen, deren Summe oder deren Differenz durch 7 teilbar ist.

341335

Man beweise: Wenn in einem Tetraeder $OABC$ die Seitenflächen OAB, OBC, OCA rechtwinklige Dreiecke mit den rechten Winkeln bei O sind, so gilt für die Längen $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$ und für die Länge h der auf ABC senkrechten Höhe des Tetraeders die Ungleichung

$$h \leq \frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,.$$

341336 s.u.

Man ermittle für jede ungerade natürliche Zahl $n \geq 3$ die Zahl

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-3}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}\right].$$

Hinweis: Ist z eine reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ diejenige ganze Zahl $g=[z]$, für die $g \leq z < g+1$ gilt.

zu 341336:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-3}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}\right]$$

34. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe (Länder-Olympiade)
Lösungen
Klassen 11-13
1. Tag

341331 Lösung: 6 Punkte

Die behauptete Ungleichung
$$\frac{1}{1+x+\frac{1}{y}}+\frac{1}{1+y+\frac{1}{z}}+\frac{1}{1+z+\frac{1}{x}}\le 1 \qquad (1)$$
ist bewiesen, wenn die durch Multiplikation mit dem Hauptnenner entstehende Ungleichung

$$\left(1+x+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(1+y+\frac{1}{z}\right)+\left(1+y+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(1+z+\frac{1}{x}\right)+\left(1+z+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+x+\frac{1}{y}\right)\le\left(1+x+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(1+y+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(1+z+\frac{1}{x}\right)$$

gezeigt ist. Diese wiederum folgt, wenn die nach Ausmultiplizieren und anschließende Subtraktion von

$4+2x+2y+2z+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}+xy+yz+zx+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$ entstehende Ungleichung

$$2\le xyz+\frac{1}{xyz}$$

gilt. Diese aber ergibt sich, indem man die für alle positiven reellen x, y, z geltende Ungleichung

$$0\le\left(xyz-1\right)^2 \qquad (2)$$

durch xyz dividiert und dann 2 addiert. (Möglich ist auch ein Zitat der für alle positiven t geltenden Ungleichung $2\le t+\frac{1}{t}$ als bekannter Sachverhalt.)

Bemerkung: Zu einer vollständigen Lösung ist erforderlich, daß aus der Darstellung ersichtlich wird, mit welcher logischen Schlußrichtung der Beweis erfolgt. Die im obigen Beweis erforderliche Schlußrichtung (2) $\Rightarrow$ (1) kann wie oben im begleitenden Text angegeben sein; sie kann aber auch anderweitig, z.B. nachträglich, kenntlich gemacht werden; ebenfalls möglich ist die Feststellung, daß Äquivalenzen vorliegen (auch wenn nicht die darin enthaltenen zwei Schlußrichtungen benötigt werden, sondern nur eine). Ferner kann in indirekter Beweisführung der Schluß von der Negation von (1) auf die Negation von (2) verwendet werden; dabei stimmt also die heuristisch naheliegende Reihenfolge mit der logisch erforderlichen überein.

341332 Lösung: 7 Punkte

Für je zwei voneinander verschiedene Punkte P_1 und P_2 im Innern des Dreiecks ABC Ist zu zeigen: Sind X_1, Y_1, Z_1 bzw. X_2, Y_2, Z_2 die Fußpunkte der Lote von P_1 bzw. P_2 auf AB, BC, CA, so gilt

$$\overline{AX_1}+\overline{BY_1}+\overline{CZ_1}=\overline{AX_2}+\overline{BY_2}+\overline{CZ_2}\ .$$

Für je zwei solche Punkte liegt nun stets einer der beiden folgenden Fälle vor:

<u>1.Fall:</u> Einer der beiden Punkte P_1, P_2 liegt auf einem der drei von dem anderen Punkt ausgehenden Lote. Die Bezeichnungen A, B, C, P_1, P_2 können dann so gewählt werden, daß P_1 auf P_2X_2 liegt (siehe Abb. L341332 a); es gilt $X_1 = X_2$.

Wegen $P_1X_1 \perp AB$ und $P_1Y_1 \perp BC$ ist $\overline{\angle P_2P_1Y_1}=\overline{\angle ABC}=60^\circ$, ebenso folgt $\overline{\angle P_2P_1Z_1}=60^\circ$. Also halbiert P_1P_2 den Winkel $\angle Y_1P_1Z_1$; daher hat P_2 denselben Abstand von P_1Y_1 wie von P_1Z_1. Die bei Y_1, Y_2 bzw. bei Z_1, Z_2 rechtwinkligen Trapeze $P_1Y_1Y_2P_2$, $P_1Z_1Z_2P_2$ stimmen folglich in ihrer Höhenlänge überein; d.h., es gilt $\overline{Y_1Y_2}=\overline{Z_1Z_2}$.

Damit folgt, wie behauptet,

$$\overline{AX_1}+\overline{BY_1}+\overline{CY_1}=\overline{AX_2}+\overline{BY_2}\underline{-\overline{Y_1Y_2}}+\overline{CZ_2}\underline{+\overline{Z_1Z_2}}=\overline{AX_2}+\overline{BY_2}+\overline{CZ_2}\ .$$

<u>2.Fall:</u> Keiner der beiden Punkte P_1, P_2 liegt auf einem der drei von dem anderen Punkt ausgehenden Lote. Dann gibt es genau eines der drei von P_1 ausgehenden Lote und genau eines der drei von P_2 ausgehenden Lote, so daß diese beiden Lote sich schneiden. Die Bezeichnungen können so gewählt werden, daß P_1Y_1 und P_2Z_2 sich in einem Punkt S schneiden (siehe Abb. L341332 b). Die Verlängerungen von Y_2P_2 und von Z_1P_1 schneiden sich in einem Punkt T. (Dieser vierte Eckpunkt des Parallelogramms P_1SP_2T kann auch auf AB oder außerhalb des Dreiecks ABC liegen; dann sind X_1UTP_1 und X_2UTP_2 zu Dreiecken entartete oder „überschlagene" Trapeze. Der folgende Beweisweg ändert sich dabei aber nicht, so daß – bei Wahl eines derartigen Vorgehens – eine nochmalige Falltrennung nicht notwendig ist.) Das Lot von T auf AB habe den Fußpunkt U.

Mit analogem Beweis wie im 1.Fall erhält man $\overline{\angle TP_1X_1}=\overline{\angle TP_1Y_1}=60^\circ$, $\overline{X_1U}=\overline{Y_1Y_2}$ und ebenso $\overline{X_2U}=\overline{Z_2Z_1}$; damit folgt die Behauptung

$$\overline{AX_1}+\overline{BY_1}+\overline{CZ_1}=\overline{AX_2}\underline{\underline{-\overline{X_2U}}}\underline{-\overline{X_1U}}+\overline{BY_2}\underline{+\overline{Y_1Y_2}}+\overline{CZ_2}\underline{\underline{+\overline{Z_2Z_1}}}=\overline{AX_2}+\overline{BY_2}+\overline{CZ_2}\ .$$

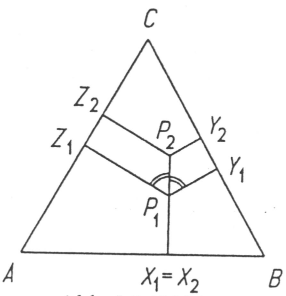

Abb. L341332 a

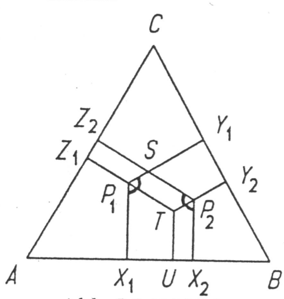

Abb. L341332 b

Bemerkungen: In anderen Beweisvarianten werden statt des obigen T andere Schnittpunkte gewählt, etwa von einem der Lote mit einer Dreiecksseite oder -höhe. Dabei können mehrf… andere Fallunterscheidungen erforderlich werden, die u.U. sorgfältig auf Vollständigkeit zu prüfen sind. Ferner werden Vereinfachungen möglich, wenn man für P auch Punkte auf dem Rand des Dreiecks ABC zuläßt. Insbesondere ergibt sich, wenn P in eine Ecke fällt, für $x+y+z$ sofort der Wert $\frac{3}{2}\cdot\overline{AB}$; für andere Lagemöglichkeiten von P ist dieser Wert dann als $x+y+z$ nachzuweisen.

Möglich ist auch der folgende Lösungsweg durch Zurückführung auf die Olympiade-Aufgabe 341322: Mit $A'B'C'$ bzw. $A''B''C''$ seien die Bilder des Dreiecks ABC bei denjenigen Verschiebungen bezeichnet, bei denen $A=B'=C''$ gilt. Die Bildpunkte von P bei diesen Verschiebungen seien P' bzw. P'' . Ferner bezeichne RST dasjenige Dreieck, dessen Seiten ST , TR , RS in dieser Reihenfolge senkrecht auf AB , BC bzw. CA durch P , P' bzw. P'' gehen. Weil die Dreiecke $RP'P''$, $SP''P$ und TPP' rechtwinklig sind, ihre bei R , S bzw. T liegenden Winkel 60° betragen und (nach Definition von P' und P'') $\overline{P'P''}=\overline{P''P}=\overline{PP'}=\overline{AB}$ gilt, sind diese Dreiecke zueinander kongruent. Daraus folgt, daß das Dreieck RST gleichseitig ist; seine Seitenlänge ergibt sich zu $\overline{AB}\cdot\sqrt{3}$, hängt also nur von $\overline{AB}$ ab. Die Längen x, y, z sind nun die Längen der Lote vom inneren Punkt A des Dreiecks RST auf dessen Seiten. Also ist ihre Summe nach 341322 unabhängig davon, welche Lage A in RST hat, und somit unabhängig von der Wahl des Punktes P in ABC.

Korrektur zum Lösungstext 341332

Im Lösungstext und in den Abbildungen sind überall X, Y, Z in dieser Reihenfolge durch Z, …, Y zu ersetzen.

341333 A Lösung: 7 Punkte

I. Wenn reelle Zahlen x , y die Gleichungen (1) und (2) erfüllen, so folgt: Einerseits ist

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\left(x^2+y^2-2\right)^2+1\geq 1\,; \tag{3}$$

andererseits folgt wegen $|\sin x|\leq 1$, $|\cos x|\leq 1$, daß

$$\sin^4 x\leq \sin^2 x \tag{4}$$

und

$$\cos^4 x\leq\cos^2 x\,, \tag{5}$$

also

$$\sin^4 x+\cos^4 x\leq\sin^2 x+\cos^2 x=1 \tag{6}$$

gilt.

Aus (3) und (6) folgt

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1 \tag{7}$$

und

$$\left(x^2+y^2-2\right)^2+1=1\,. \tag{8}$$

Wegen (7) gilt in (6) Gleichheit auch an der Stelle des Zeichens $\leq$, also muß auch in (4) und in (5) Gleichheit gelten. Aus der Gleichheit in (4) folgt $\sin^2 x\cdot\left(\sin^2 x\ -\ 1\right)=0$, also $\sin x=0$ oder $\sin x=1$ oder $\sin x=-1$. Daher ist $x=k\cdot\frac{\pi}{2}$ mit einer ganzen Zahl k .

Wegen (8), also $x^2 = 2 - y^2 \leq 2$, erfüllt diese Zahl k die Ungleichung $k^2 \cdot \frac{\pi^2}{4} \leq 2$, also $k^2 \leq \frac{8}{\pi^2} < 1$. Das ist wegen der Ganzzahligkeit von k nur für $k = 0$ möglich. Damit ergibt sich $x = 0$ und wegen (8) weiter $y^2 = 2$, also $y = \sqrt{2}$ oder $y = -\sqrt{2}$.

II. Wenn $x = 0$ gilt und entweder $y = \sqrt{2}$ oder $y = -\sqrt{2}$ ist, so sind mit $y^4 + x^2y^2 - 4y^2 + 4 = 2^2 + 0 - 4 \cdot 2 + 4 = 0$ und $x^4 + x^2y^2 - 4x^2 + 1 = 1$ die Gleichungen (1) und (2) erfüllt.

Mit I. und II. ist gezeigt, daß (1) und (2) unter allen Paaren reeller Zahlen genau von $\left(0, \sqrt{2}\right)$ und $\left(0, -\sqrt{2}\right)$ erfüllt werden.

<u>341333 B Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

I. Wenn eine Funktion f die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, so folgt:

Aus (2) mit $x = y = 1$ und (3) erhält man zunächst $f(2) = f(1) + f(1) + 2 - 1 = 5$.

Damit ergeben sich aus (1) mit $y = 2$ sowie aus (2) mit $x = y$ für jedes reelle x die Gleichungen

$$f(2x) = 5 \cdot f(x) - f(x) - 5 + 2$$

und

$$f(2x) = 2 \cdot f(x) + 2x^2 - 1 .$$

Nach Subtraktion folgt $2 \cdot f(x) - 2x^2 - 2 = 0$, also

$$f(x) = x^2 + 1 . \qquad (4)$$

II. Durch (4) ist eine Funktion f für alle reellen Zahlen definiert; sie erfüllt für alle reellen x und y wegen

$$\left(x^2+1\right) \cdot \left(y^2+1\right) - \left(x^2+1\right) - \left(y^2+1\right) + 2 = x^2y^2 + 1 ,$$

$$x^2 + 1 + y^2 + 1 + 2xy - 1 = (x+y)^2 + 1 ,$$

$$1^2 + 1 = 2$$

die Gleichungen (1), (2) und (3).

Mit I. und II. ist gezeigt, daß genau die durch (4) definierte Funktion die Bedingungen der Aufgabenstellungen erfüllt.

Vorschläge zur Punktverteilung

<u>341331</u>

Rechnerische Zurückführung z.B. auf $(xyz-1)^2 \geq 0$ 4
Ersichtliche Berücksichtigung logisch korrekten Vorgehens 2

6

<u>341332</u>

Je nach Beweisansatz z.B.:
  Ersichtliche Vollständigkeit einer Fallunterscheidung 2
  Korrekte Teilbeweise 5

7

<u>341333 A</u>

Zurückführung auf $\sin^4 x = \sin^2 x$ und $x^2 + y^2 = 2$
  oder ähnlich nutzbare Vereinfachung 4
Abschließende Herleitung der beiden Lösungen und Probe 3

7

<u>341333 B</u>

Herleitung von $f(x) = x^2 + 1$:
  Ermittlung einzelner Beziehungen, z.B. $f(2) = 5$ 2
  Weiterführende Aussagen bis zur Gewinnung von $f(x)$ 3
Nachweis, daß $f(x) = x^2 + 1$ die Bedingungen (1), (2) erfüllt 2

7

34. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe (Länder-Olympiade)
Lösungen
Klassen 11-13
2. Tag

341334 Lösung: 6 Punkte

I. Die Zahl $n=4$ hat die Eigenschaft (*) nicht. Beweis:
Es gibt eine Menge von 4 natürlichen Zahlen, in der je zwei Zahlen sowohl eine nicht durch 7 teilbare Summe als auch eine nicht durch 7 teilbare Differenz haben. Ein Beispiel einer derartigen Menge ist $\{4,5,6,7\}$; denn die sämtlichen Summen von je zwei ihrer Zahlen sind 9, 10, 11, 12, 13, und die sämtlichen Differenzen zwischen je zwei ihrer Zahlen sind 1, 2, 3.
Wie demnach die Beispiele $\{4,5\}$ und $\{4,5,6\}$ zeigen, haben auch $n=2$ und $n=3$ die Eigenschaft (*) nicht.

II. Die Zahl $n=5$ hat die Eigenschaft (*); denn für jede Menge M von 5 natürlichen Zahlen gilt:
1. Falls M zwei Zahlen enthält, die bei Division durch 7 denselben Rest lassen, so ist die Differenz dieser beiden Zahlen durch 7 teilbar.
2. Falls aber je zwei der Zahlen in M bei Division durch 7 voneinander verschiedene Reste lassen, so sind dies fünf verschiedene der Reste 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. In der Menge R der von 0 verschiedenen dieser Reste kommen höchstens zwei der sechs Reste 1, 2, 3, 4, 5, 6 nicht vor, also kann auch höchstens für zwei der Paare (1, 6), (2, 5), (3, 4) gelten, daß dieses Paar einen nicht in R befindlichen Rest enthält; d.h., R enthält für mindestens eines der Paare dessen beide Reste. Damit ist bewiesen, daß es in M zwei Zahlen gibt, deren Summe durch 7 teilbar ist.

Mit I. und II. ist gezeigt: Die kleinste natürliche Zahl $n \geq 2$ mit der in der Aufgabe genannten Eigenschaft ist 5.

341335 Lösung: 7 Punkte

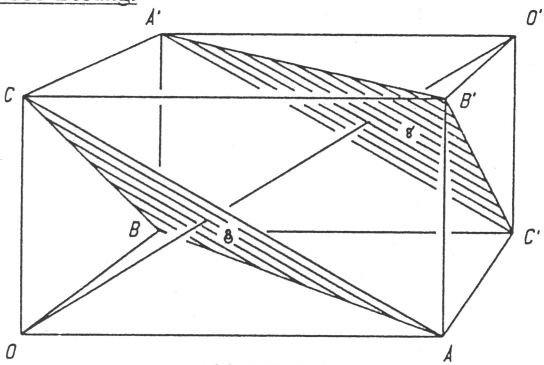

Abb. L341335

Es seien A', B', C', O' diejenigen Punkte, für die $OBA'C$, $OCB'A$, $OBC'A$ Rechtecke sind und $OBA'CAC'O'B'$ ein Quader ist (siehe Abb. L341335). Wegen $BC \parallel C'B'$ und $CA \parallel A'C'$ sind die durch A, B, C bzw. durch A', B', C' gelegten Ebenen $\varepsilon, \varepsilon'$ zueinander parallel. Dieselbe Verschiebung, die O in den (auf ε liegenden) Punkt A überführt, führt den

Die Diagonale OO' wird durch ihre Schnittpunkte mit ε und ε' in drei Teilstrecken zerlegt. Falls OO' senkrecht auf ε und ε' ist, hat jede dieser drei Teilstrecken die Länge h. Andernfalls ist jede von ihnen die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, in dem eine geeignete auf ε und ε' senkrechte Strecke der Länge h als Kathete auftritt. Somit folgt $\overline{OO'} \geq 3 \cdot h$. Wegen $\overline{OO'} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (als bekannter Sachverhalt (Körperdiagonale des Quaders oder „Pythagoras-Satz im Raum") zu zitieren oder durch zweimaliges Anwenden des Pythagoras-Satzes (der Ebene) zu beweisen) ist damit die Behauptung $h \leq \frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ gezeigt.

Andere Lösungsmöglichkeiten beginnen damit, das Volumen V des Tetraeders $OABC$ und den Flächeninhalt F des Dreiecks ABC zu ermitteln. Es ergibt sich $V = \frac{1}{6}abc$, $F = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$. Dies kann auf verschiedene Weise erhalten werden, z.B. mit der Heronischen Formel, angewandt auf $\overline{BC} = \sqrt{b^2+c^2}$, $\overline{CA} = \sqrt{c^2+a^2}$, $\overline{AB} = \sqrt{a^2+b^2}$, oder über $\overline{OD} = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$ und $\overline{AD} = \sqrt{a^2+\overline{OD}^2}$, wo D der Schnittpunkt von BC mit der zu BC senkrechten Ebene durch OA, also in den Dreiecken OBC und ABC der Fußpunkt der auf BC senkrechten Höhen ist. Wegen $V = \frac{1}{3}F \cdot h$ erhält man so

$$h = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}. \qquad (1)$$

Dies kann auch mit analytischer Geometrie hergeleitet werden: In dem Koordinatensystem mit O als Ursprung und durch A, B, C gelegten Achsen hat die Ebene ε die Gleichung

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

in Hessescher Normalform $\frac{bcx+cay+abz-abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}} = 0$, wonach in (1) der Abstand von O zu ε angegeben ist.

Die zu beweisende Ungleichung lautet demnach

$$\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}} \leq \frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Sie folgt wegen $a, b, c > 0$ aus $\quad 9a^2b^2c^2 \leq \left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot\left(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\right)$;

dies folgt aus $\quad 9 \leq \left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$,

dies aus $\quad 6 \leq \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}$, und diese Ungleichung folgt aus der für alle positiven t geltenden Ungleichung $t + \frac{1}{t} \geq 2$.

<u>341336 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Für die Zahlen

$$a = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-3}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}$$

und

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2-2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2}}$$

gilt einerseits: Wegen

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} > \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}} \tag{1}$$

für jedes positive k ist $a > b$. Andererseits gilt

$$a - b = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}\right) - \cdots$$

$$\cdots - \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2-2}} - \frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2}} ;$$

nach (1) folgt daraus $a - b < \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}$. Also ist

$$0 < a - b < 1 . \tag{2}$$

Weiter gilt

$$a = \left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right) + \cdots + \left(\sqrt{n^2-3} - \sqrt{n^2-4}\right) + \left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2-2}\right),$$

$$b = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{5} - \sqrt{4}\right) + \left(\sqrt{7} - \sqrt{6}\right) + \cdots + \left(\sqrt{n^2-2} - \sqrt{n^2-3}\right) + \left(n - \sqrt{n^2-1}\right),$$

also

$$a + b = n - 1 . \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt durch Addition $\quad n - 1 < 2a < n$,

also erst recht $\quad n - 1 < 2a < n + 1$

und damit

$$\frac{n-1}{2} < a < \frac{n-1}{2} + 1 . \tag{4}$$

Da n ungerade ist, ist $\frac{n-1}{2}$ eine ganze Zahl. Damit zeigt (4), daß die gesuchte Zahl $[a] = \frac{n-1}{2}$ lautet.

Vorschläge zur Punktverteilung

341334

Nachweis, daß $n=2$, $n=3$, $n=4$ die geforderte Eigenschaft nicht haben
(z.B. durch Betrachtung von $\{4,5,6,7\}$) 1

Nachweis, daß $n=5$ die geforderte Eigenschaft hat, z.B.:

Berücksichtigung von Paaren mit durch 7 teilbarer Differenz 1

" " " " " " " Summe 2

Nachweis der Vollständigkeit 2

6

341335

Je nach Lösungsweg z.B.:

Nachweis dreier gleicher Abstände zwischen O , ε , ε' , O' 4

Schluß auf $OO' \geq 3h$, abschließende Herleitung der behaupteten Ungleichung .. 3

Berechnung von h aus a , b , c 4

Herleitung der behaupteten Ungleichung (einschl. Beachtung korrekter Schlußrichtung) 3

7

341336

Je nach Ansatz, z.B. bei Einführung von b :

Herleitung von $a > b$ 2

" " $a - b < 1$ 2

" " $a + b = n - 1$ 2

" " $[a] = \frac{n-1}{2}$ 1

7