Umlauft

34. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe (Kreisolympiade)
Aufgaben
Klassen 11-13

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

341321

Man beweise, daß für alle nichtnegativen reellen Zahlen x und y die Ungleichungen

$$0 \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{x+y}{2} \leq \frac{|x-y|}{2}$$

gelten.

341322

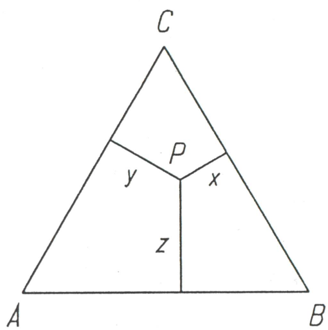

Abb. A 341322

Man beweise für jeden Punkt P, der im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit dem Flächeninhalt $F = 1$ liegt:

Die Längen x, y, z der Lote von P auf die Dreiecksseiten (siehe Abb. A 341322) erfüllen die Gleichung

$$x + y + z = \sqrt[4]{3}\,.$$

341323

Man beweise die folgende Aussage:

Wenn die Längen der Seitenkanten eines Tetraeders $ABCD$ die Gleichungen

$$\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = 1$$

und

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

erfüllen, so ist die Oberfläche des Tetraeders kleiner als $\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}$.

341324

Ist z eine 1995-ziffrige natürliche Zahl und ist n eine natürliche Zahl mit $1 \leq n \leq 1994$, so bezeichne $z^{[n]}$ diejenige Zahl, deren Ziffernndarstellung entsteht, indem man aus der Zifferndarstellung von z die ersten n Ziffern wegläßt und in gleicher Reihenfolge wieder an das Ende der Zifferndarstellung anfügt.

Mit diesen Bezeichnungen beweise man für jedes 1995-ziffrige z und jedes n mit $1 \leq n \leq 1994$:

Ist z durch 27 teilbar, so ist auch $z^{[n]}$ durch 27 teilbar.

34. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen
Klassen 11-13

341321 Lösung: 10 Punkte

I. Für alle reellen Zahlen x und y gilt $(x-y)^2 \geq 0$.

Daraus folgt
$$x^2-2xy+y^2 \geq 0 \,,$$
$$2x^2+2y^2 \geq x^2+2xy+y^2 \,,$$
$$2x^2+2y^2 \geq (x+y)^2 \,.$$

Da x und y nichtnegativ sind, ergibt Division durch 4 und Ziehen der Quadratwurzel
$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2} \,;$$
daraus folgt die linke zu beweisende Ungleichung.

II. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $0 \leq x \leq y$. Dann ist $x^2 \leq y^2$ sowie $|x-y| = y-x$; deshalb gilt
$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{y^2+y^2}{2}} = y = \frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2} = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} \,,$$
woraus die rechte zu beweisende Ungleichung folgt.

2. Beweisweg zur rechten Ungleichung: Da x und y nichtnegativ sind, gilt
$$0 \leq \frac{|x-y| \cdot (x+y)}{2} \,.$$

Addition von
$$\frac{x^2+y^2}{2} = \frac{x^2-2xy+y^2}{4} + \frac{x^2+2xy+y^2}{4} = \left(\frac{|x-y|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

ergibt
$$\frac{x^2+y^2}{2} \leq \left(\frac{|x-y|}{2} + \frac{x+y}{2}\right)^2 \,,$$

also, nochmals wegen $x \geq 0$, $y \geq 0$,
$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \frac{|x-y|}{2} + \frac{x+y}{2} \,.$$

341322 Lösung: 8 Punkte

Für die Seitenlänge a und den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks ABC, nach Voraussetzung $F=1$, gilt $F = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$, also
$$a = \frac{2\sqrt{F}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \,. \qquad (1)$$

Durch die Strecken AP, BP, CP wird das Dreieck ABC in die Teildreiecke BCP , CAP und ABP mit den Flächeninhalten $\frac{1}{2}ax$, $\frac{1}{2}ay$ bzw. $\frac{1}{2}az$ zerlegt. Die Summe dieser Flächeninhalte ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC; d. h., es gilt $\frac{a}{2} \cdot (x+y+z) = 1$, nach (1) also $x+y+z = \sqrt[4]{3}$, w. z. b. w.

341323 Lösung: 12 Punkte

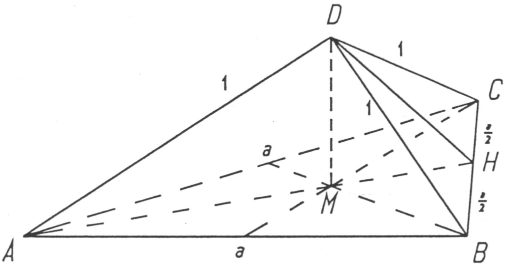

Abb. L 341323

Mit der Seitenlänge $a = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ hat das gleichseitige Dreieck ABC die Höhenlänge $\overline{AH} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$, also (da der Höhenschnittpunkt M zugleich Schwerpunkt ist) den Höhenabschnitt $\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AH} = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{3}$ und den Flächeninhalt $\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$.

Jedes der Dreiecke ABD, BCD, CAD ist gleichschenklig mit der Basislänge a und der Schenkellänge 1. Die zur Basis senkrechte Höhe ist zugleich Seitenhalbierende, hat also nach dem Satz des Pythagoras die Länge $\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$. Daher hat jedes dieser Dreiecke den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$.

Somit beträgt die Oberfläche des Tetraeders $$F = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} + \frac{3}{2} \cdot a \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}\,. \qquad (1)$$

Die Punkte D und M haben beide zu A, B, C jeweils gleichgroße Abstände, also ist DM senkrecht auf der Ebene durch A, B, C. Daher ist AMD ein bei M rechtwinkliges Dreieck, also gilt $0 < \overline{AM} < \overline{AD}$, d. h.

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{a}{3} \cdot \sqrt{3} < 1, \\ 0 &< a < \sqrt{3}, \\ 0 &< \left(3 - a^2\right)^2, \\ 0 &< 36 - 24a^2 + 4a^4, \\ 3a^2 \cdot \left(4 - a^2\right) &< \left(6 - a^2\right)^2. \end{aligned} \qquad (2)$$

Da a, $4 - a^2$ und $6 - a^2$ wegen (2) positiv sind, folgt weiter

$$a \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{4 - a^2} < 6 - a^2, \qquad (3)$$

nach Addition von a^2 und Multiplikation mit $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ also

$$\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} + \frac{3}{2} \cdot a \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} < \frac{3}{2}\sqrt{3}, \qquad (4)$$

d. i. wegen (1) die behauptete Ungleichung.

Bemerkungen: 1. Heuristisch ist die Reihenfolge von (4) über (3) bis (2) naturgemäß. Wird sie so in einem Lösungstext gebracht, so sollte ersichtlich gemacht werden, daß für den verlangten Beweis die Schlußrichtung (2) $\longrightarrow$ (4) verwendet wird.

2. Die Ungleichung (3) kann auch damit begründet werden, daß sie als Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel von a^2 und $3\cdot\left(4-a^2\right)$ entsteht. Bei dieser Begründung ist dann zusätzlich (durch Hinweis auf $a^2 \neq 3\cdot\left(4-a^2\right)$, was aus (2) folgt) das Gleichheitszeichen auszuschließen.

3. Statt die zur Flächenberechnung herangezogenen Längen sämtlich durch a auszudrücken, kann man z. B. auch $h=\overline{MD}$ verwenden. Es wird $\overline{AM}=\sqrt{1-h^2}$, $a=\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-h^2}$, $F=\frac{3}{4}\sqrt{3}\cdot\left(1-h^2+\sqrt{1-h^2}\cdot\sqrt{1+3h^2}\right)$, und man erhält: Wegen $0<h<1$ folgt $-3h^4<h^4$, $\left(1-h^2\right)\cdot\left(1+3h^2\right)<\left(1+h^2\right)^2$, $1-h^2+\sqrt{1-h^2}\cdot\sqrt{1+3h^2}<2$ und daraus die Behauptung.

4. Ein Ansatz, bei dem *ein einzelner Summand*, in (4) etwa $\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}$, allein für sich abgeschätzt wird (z. B. indem zunächst aus (2) auf $\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}<\frac{3}{4}\cdot\sqrt{3}$ geschlossen wird), ist *nicht als Teil eines zum Ziel führenden Lösungsweges zu werten*, da nicht für alle a mit (2) die nun erforderliche Abschätzung des zweiten Summanden möglich wird.

341324 Lösung: 10 Punkte

Es genügt, die Aussage für $n=1$ nachzuweisen; denn ist dies geschehen, so folgt die Aussage für jedes größere $n=N$, indem man die für $n=1$ erhaltene Aussage N mal anwendet.

Für $n=1$ gilt nun: Ist a die erste Ziffer von z, so ist $z=a\cdot 10^{1994}+b$ und dann $z^{[1]}=10b+a$ mit einer natürlichen Zahl b,

also gilt
$$10z-z^{[1]}=a\cdot\left(10^{1995}-1\right)=a\cdot\left(10^{3\cdot 665}-1\right)=a\cdot\left(1000^{665}-1\right).$$

Da $1000=37\cdot 27+1$ bei Division durch 27 den Rest 1 läßt, läßt auch 1000^{665} bei Division durch 27 den Rest 1; damit ist bewiesen: $10z-z^{[1]}$ ist durch 27 teilbar; und wenn voraussetzungsgemäß z durch 27 teilbar ist, so ist auch $z^{[1]}$ durch 27 teilbar, w. z. b. w.

Vorschläge zur Punktverteilung

341321

Nachweis der linken Ungleichung:

(Rechnerische Umformungen ; ersichtliche Beachtung der logischen Schlußrichtung und Nichtnegativitätsbedingungen für Rechenoperationen (Multiplikation, Radizieren): 3+2 Punkte) 5

Nachweis der rechten Ungleichung (entsprechend aufgeteilte Punktvergabe) 5

10

341322

Berücksichtigung der Voraussetzung $F = 1$ (z. B. zur Ermittlung von a) 2

Weiter nutzbare Aussage (z. B. Flächeninhalte von BCP, CAP, ABP durch a, x, y, z ausgedrückt) 3

Abschließende Herleitung der zu zeigenden Gleichung 3

8

341323

Oberfläche des Tetraeders, ausgedrückt (etwa) durch eine Größe (z. B. durch a oder durch h) (z. B Ausdrücken benötigter anderer Größen; Teilflächen; Gesamtfläche: 3+2+1 Punkte) 6

Herleitung der zu zeigenden Ungleichung

(Schluß von Tetraedereigenschaften auf eine Ungleichung, im Beispiel $a < \sqrt{3}$ bzw. $h < 1$; Schluß von dieser Ungleichung auf die zu zeigende Ungleichung: 3+3 Punkte) . 6

12

341324

Zurückführung auf den Fall $n = 1$ (Falls ein Beweis ohne diese Zurückführung geführt wird, sind diese Punkte den anderen, dadurch aufwendiger gewordenen Beweisteilen zuzuordnen) 2

Gewinnung weiter nutzbarer Ausdrücke (z. B. für z; für $z^{[1]}$; für $10z - z^{[1]}$: 1+2+2 Punkte) 5

Nutzung von $1000 \equiv 1 \bmod 27$ zur abschließenden Herleitung der nachzuweisenden Teilbarkeitsaussage 3

10