Umlauf

34. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Deutschland-Olympiade)
Aufgaben
Klasse 10
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

341041

Zeigen Sie. daß die Zahl $z = 7 + 7^3 + 7^5 + 7^7 + \cdots + 7^{93} + 7^{95}$ durch 336 teilbar ist!

341042

Auf der Seite AB eines Quadrates $ABCD$ werde ein Punkt $X \neq A$ gewählt. Dann werde das Quadrat durch die Strecken AC und XD in vier Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, die Wahl von X so zu treffen, daß es natürliche Zahlen p, q und r gibt, für die die Flächeninhalte dieser Teilflächen in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis $1 : p : q : r$ stehen!

341043

Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n mit $n \geq 2$ und jede natürliche Zahl k mit $k \geq 1$ die Zahl

$$z = \left(1 + k + k^2 + \cdots + k^n\right)^2 - k^n$$

keine Primzahl ist!

Umlauft

34. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Deutschland-Olympiade)
Aufgaben
Klasse 10
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

341044

Zu jeder gegebenen reellen Zahl c sind zwei in einem Intervall $[a,b]$ definierte Funktionen f und g gesucht, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

(1) Für jedes x in dem Intervall $[a,b]$ gilt $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

(2) Die Funktion f ist nicht konstant.

(3) Der Graph von g geht aus dem Graph von f durch Verschiebung um den Wert c in Richtung der y-Achse hervor.

Geben Sie (passend zu c) Zahlen a , b und im Intervall $[a,b]$ definierte Funktionen f, g an, und weisen Sie nach, daß bei Ihren Angaben die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt sind!

341045

Einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ wird die Inkugel K einbeschrieben (das ist diejenige Kugel, die alle vier Dreiecksflächen ABC , ABD , ACD , BCD berührt). Dieser Kugel wird ein zweites regelmäßiges Tetraeder $PQRS$ einbeschrieben (d.h., seine Ecken P , Q , R , S liegen alle auf der Oberfläche der Kugel K).

Welches Verhältnis $V_2 : V_1$ bildet das Volumen V_2 eines solchen Tetraeders $PQRS$ mit dem Volumen V_1 von $ABCD$?

341046

In einem Kreis k seien vier Sehnen AB, BC, CD, DE von gleicher Länge $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}$ gezeichnet. Dabei sei diese Länge so gewählt, daß der von A über B , C , D zu E führende Bogen kleiner als der gesamte Kreisumfang ist. Der Schnittpunkt der Strecken AC und BD sei S ; der Schnittpunkt der Strecken AD und BE sei T .

Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen stets $\overline{AB}^2=\overline{AC}\cdot\overline{ST}$ folgt!

34. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Deutschland-Olympiade)
Lösungen
Klasse 10
1. Tag

341041 Lösung: 7 Punkte

Es gilt $z = 7 + 7^3 + 7^5 + \cdots + 7^{95} = 7 \cdot \left(1 + 7^2 + 7^4 + \cdots + 7^{94}\right)$. (1)

Ferner gilt $1 + 7^2 + 7^4 + \cdots + 7^{94} = 1 + (48+1) + (48+1)^2 + \cdots + (48+1)^{47}$. (2)

Jeder der Summanden $(48+1)$, $(48+1)^2$, ... , $(48+1)^{47}$ läßt bei Division durch 48 den Rest 1 ; d.h., es gibt ganze Zahlen g_1 , g_2 , ... , g_{47} , mit denen $48+1 = g_1 \cdot 48 + 1$, $(48+1)^2 = g_2 \cdot 48 + 1$, ... , $(48+1)^{47} = g_{47} \cdot 48 + 1$ gilt. Da dies zusammen mit dem Summanden 1 genau 48 Summanden sind, beträgt die in (2) genannte Summe

$$1 + \left(g_1 \cdot 48 + 1\right) + \left(g_2 \cdot 48 + 1\right) + \cdots + \left(g_{47} \cdot 48 + 1\right)$$
$$= \left(g_1 + g_2 + \cdots + g_{47}\right) \cdot 48 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{48 \text{ Summanden}}$$
$$= \left(g_1 + g_2 + \cdots + g_{47} + 1\right) \cdot 48 .$$

Zusammen mit (1) folgt damit $z = 7 \cdot 48 \cdot \left(g_1 + g_2 + \cdots + g_{47} + 1\right)$,
also ist z durch $7 \cdot 48 = 336$ teilbar, w.z.b.w.

2.Lösungsweg: Es gilt $z = 7 \cdot \dfrac{49^{48} - 1}{49 - 1}$. Weiter folgt der Reihe nach:

$$49^2 = 48^2 + 2 \cdot 48 + 1 \equiv 2 \cdot 48 + 1 \mod 48^2 \ , \quad 49^4 \equiv (2 \cdot 48 + 1)^2 \equiv 4 \cdot 48 + 1 \mod 48^2 \ ,$$
$$49^6 \equiv (4 \cdot 48 + 1) \cdot (2 \cdot 48 + 1) \equiv 6 \cdot 48 + 1 \mod 48^2 \quad ,\ldots, \quad 49^{48} \equiv 48 \cdot 48 + 1 \mod 48^2 .$$

Also ist 49^{48} -1 durch 48^2 teilbar und daher z durch $7 \cdot 48$ teilbar.

341042 Lösung: 7 Punkte

Die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ sei a . Für jeden Punkt $X \neq A$ auf AB seien folgende Bezeichnungen gewählt (siehe Abb. L341042): Der Schnittpunkt von AC mit XD sei S, die Fußpunkte der Lote von S auf AB bzw. AD seien H bzw. K, die Flächeninhalte der Flächenstücke AXS , ADS , CDS , $XBCS$ seien in dieser Reihenfolge F_1 , F_2 , F_3 , F_4 .

Wegen $AX \perp AD$ gilt $F_1 + F_2 = \dfrac{ax}{2}$. (1)

Da die Diagonale AC den Winkel $\angle HAK$ halbiert, folgt aus Kongruenzsatz sww, daß $\Delta AHS \cong \Delta AKS$, also $\overline{HS} = \overline{KS}$ gilt. Daraus folgt $F_1 : F_2 = x : a$, also

$$F_2 = \frac{a}{x} \cdot F_1 . \tag{2}$$

Setzt man dies in (1) ein, so folgt $F_1 \cdot \left(1 + \dfrac{a}{x}\right) = \dfrac{ax}{2}$, also $$F_1=\frac{ax^2}{2(x+a)}\,; \tag{3}$$

hieraus und aus (2) folgt $$F_2=\frac{a^2x}{2(x+a)}\,. \tag{4}$$

Ferner ergibt sich $$F_3=\frac{a^2}{2}-F_2=\frac{a^2\cdot(x+a)\,-\,a^2x}{2(x+a)}=\frac{a^3}{2(x+a)}\,, \tag{5}$$

$$F_4=\frac{a^2}{2}-F_1=\frac{a^2\cdot(x+a)\,-\,ax^2}{2(x+a)}=\frac{a^3+a^2x-ax^2}{2(x+a)}\,. \tag{6}$$

Aus (3), (4), (5), (6) folgt $$F_1:F_2:F_3:F_4=x^2:ax:a^2:\left(a^2+ax-x^2\right), \tag{7}$$

wegen $0<x\le a$ also $0<F_1\le F_2\le F_3\le F_4$.

I. Wegen dieser Ungleichungen können F_1, F_2, F_3, F_4 nur in einer solchen Reihenfolge im Verhältnis $1:p:q:r$ mit natürlichen Zahlen p, q, r stehen, bei der für eine dieser Zahlen, etwa für p, insbesondere $F_1:F_2=1:p$ gilt.

Nach (7) besagt dies $x:a=1:p$, also $$x=\frac{a}{p}\,. \tag{8}$$

II. Gilt (8) mit einer natürlichen Zahl p, so ist nach (7)

$$F_1:F_2:F_3:F_4=\frac{a^2}{p^2}:\frac{a^2}{p}:a^2:\left(a^2+\frac{a^2}{p}-\frac{a^2}{p^2}\right)=1:p:p^2:\left(p^2+p-1\right),$$

also wird die Bedingung erfüllt, daß F_1, F_2, F_3, F_4 in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis $1:p:q:r$ mit natürlichen Zahlen p, q, r stehen.

Aus I. und II. folgt: Diese Bedingung wird genau dann erfüllt, wenn X (auf AB mit $X\neq A$) so gewählt wird, daß $\overline{AX}=\frac{a}{p}$ mit einer natürlichen Zahl p gilt.

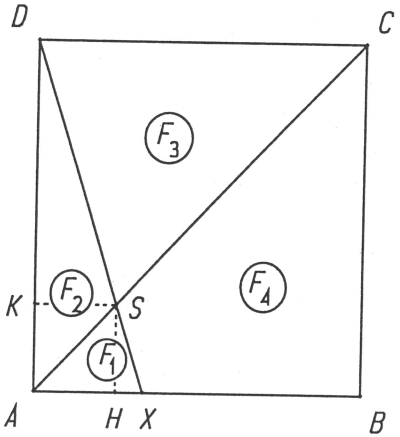

Abb L341042

341043 Lösung: 6 Punkte

Für je zwei natürliche Zahlen n und k mit $n \geq 2$ und $k \geq 1$ gilt nach der Formel

$$\left(1+k+k^2+\cdots+k^n\right)\cdot(k-1)=k^{n+1}-1 \tag{1}$$

(die als bekannter Sachverhalt zitiert werden kann): Im Fall $k>1$ ist die in der Aufgabe zu untersuchende Zahl

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{k^{n+1}-1}{k-1}\right)^2 - k^n \\ &= \frac{1}{(k-1)^2}\cdot\left(k^{2n+2}-2k^{n+1}+1-\left(k^{n+2}-2k^{n+1}+k^n\right)\right) \\ &= \frac{1}{(k-1)^2}\cdot\left(k^{2n+2}-k^{n+2}-k^n+1\right) \\ &= \frac{k^{n+2}-1}{k-1}\cdot\frac{k^n-1}{k-1}\ . \end{aligned}$$

Aus (1) mit $n+1$ und mit $n-1$ statt n folgt weiter

$$z=\left(1+k+k^2+\cdots+k^{n+1}\right)\cdot\left(1+k+k^2+\cdots+k^{n-1}\right)\ . \tag{2}$$

Im Fall $k=1$ gilt (2) auch, nämlich wegen $z=(n+1)^2-1=(n+2)\cdot n$.

Aus (2) folgt wegen $k \geq 1$ bzw. $n \geq 2$, daß z das Produkt von zwei natürlichen Zahlen ist, die beide größer als 1 sind. Daher ist z keine Primzahl.

Vorschläge zur Punktverteilung

341041

Vorbereitende Rechnung, z.B. (2)	2
Aussage oder Formelangabe zur Teilbarkeit durch 48	3
Abschließender Nachweis der Teilbarkeit durch 336	2
	7

341042

Nutzbare Formeln für F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , z.B. (3)-(6)	4
Schluß auf $F_1 : F_2 = 1 : p$	2
Abschließende Herleitung, daß genau $\overline{AX}=\frac{a}{p}$ die Bedingung der Aufgabe erfüllt	1
	7

341043

Herleitung einer für den Nachweis nutzbaren Umformung	4
Abschließender Nachweis der Zerlegbarkeit	2
	6

34. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Deutschland-Olympiade)
Lösungen
Klasse 10
2. Tag

341044 Lösung: 6 Punkte

Die Bedingungen (1) und (3) werden von Zahlen a, b und von (im Intervall $[a,b]$ definierten) Funktionen f, g erfüllt, wenn für jedes x aus $[a,b]$ der Funktionswert $y = f(x)$ von Null verschieden ist, die Gleichung

$$\frac{1}{y} = y + c \qquad (4)$$

erfüllt und wenn die in (4) genannte Zahl jeweils zugleich auch der Funktionswert $g(x)$ ist.

Die Gleichung (4) hat genau die Lösungen

$$y_{1;2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4}+1} \; ; \qquad (5)$$

für jedes c gilt dabei $y_1 \neq y_2$. Eine Funktion f der eben beschriebenen Art erfüllt demnach auch (2), wenn jeder (für x in $[a,b]$ auftretende) Funktionswert $f(x)$ eine der beiden Zahlen y_1, y_2 aus (5) ist, jedoch so, daß *nicht für alle* x in $[a,b]$ *dieselbe* dieser beiden Zahlen der Funktionswert $f(x)$ ist.

Damit ist bewiesen, daß bei jeder folgendermaßen getroffenen Wahl von a,b,f,g die Bedingungen (1),(2),(3) erfüllt sind:

Man wähle a, b mit $a < b$ und sonst beliebig.
Dann wähle man in $[a,b]$ zwei beliebige Zahlen $x_1 \neq x_2$ und definiere

$$f(x_1) = -\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4}+1}\,, \qquad f(x_2) = -\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4}+1}\;;$$

für jedes x in $[a,b]$ mit $x \neq x_1$ und $x \neq x_2$ wähle man ferner beliebig jeweils eine der beiden Zahlen $-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4}+1}$, $-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4}+1}$ als Funktionswert $f(x)$.

Für jedes x in $[a,b]$ setze man schließlich $g(x) = f(x) + c$.

Abb. L341044 zeigt ein Beispiel für $c = 2$.

Hinweis: Zur vollständigen Lösung der Aufgabe genügt es, ein spezielles Beispiel für a,b,f,g anzugeben und für dieses Beispiel (1),(2),(3) als erfüllt nachzuweisen. Eine Beschreibung allgemeiner Wahlmöglichkeiten wie im obigen Text wird nicht vom Schüler verlangt.

341045 Lösung: 7 Punkte

Über das regelmäßige Tetraeder $ABCD$ und seine Inkugel K gilt[1)] (siehe Abb. L341045): Die vier Tetraederhöhen AP, BQ, CR, DS schneiden sich in einem Punkt M; dieser hat von den Flächen BCD, ACD, ABD, ABC gleiche Abstände $\overline{MP} = \overline{MQ} = \overline{MR} = \overline{MS}$, er ist also der Mittelpunkt der Inkugel K des Tetraeders $ABCD$. Die Strecken MA, MB, MC, MD bilden gleichgroße Winkel miteinander jeweils wie MP, MQ, MR, MS; ihre Längen sind das Dreifache des Radius von K, also sind P, Q, R, S die Ecken eines regelmäßigen

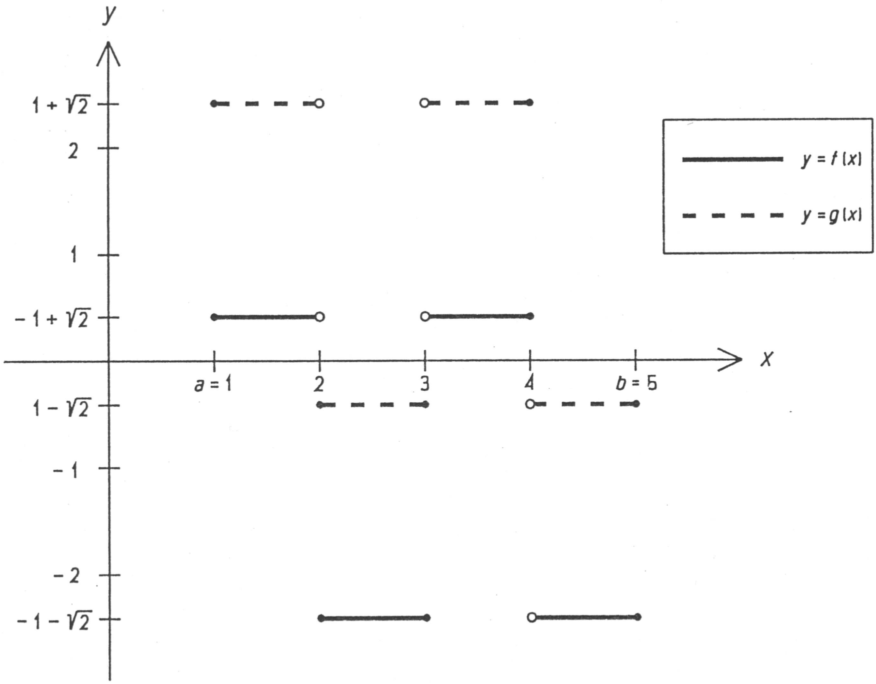

Abb. L341044

---

[1] Die oben anschließenden Aussagen können als bekannter Sachverhalt zitiert werden. Möglich sind stattdessen z.B. folgende Beweisführungen: Ist E der Mittelpunkt von AB, so gilt $AB \perp CE$ und $AB \perp DE$, also ist AB senkrecht auf der Ebene ε durch C, D, E. Ebenso gilt: Ist F der Mittelpunkt von BC, so ist BC senkrecht auf der Ebene δ durch A, D, F. Daher ist die Ebene durch A, B, C senkrecht auf der Schnittgeraden von ε und δ. Diese enthält also die auf ABC senkrechte Höhe des Tetraeders; damit ist gezeigt: Diese Höhe hat als Fußpunkt S den Schnittpunkt von CE mit AF, d.h. den Höhenschnittpunkt von ABC. Entsprechendes gilt für die anderen Tetraederhöhen; so ist die auf BCD senkrechte Höhe AP enthalten in der Schnittgeraden von δ und der Ebene ζ durch A, C, G, wobei G der Mittelpunkt von BD ist. Somit gehen diese beiden (und ebenso die anderen) Tetraederhöhen durch einen gemeinsamen Punkt M, nämlich den Schnittpunkt der drei Ebenen ε, δ, ζ.

In dem mit $\overline{AF} = \overline{DF}$ gleichschenkligen Dreieck zeigt man für die Höhenabschnitte $\overline{MP} = \overline{MS}$ (und entsprechend $= \overline{MQ} = \overline{MR}$), z.B. vermittels $\overline{\angle ADF} = \overline{\angle DAF}$, $\Delta ADP \cong \Delta DAS$, $\overline{\angle DAP} = \overline{\angle ADS}$, $\overline{AM} = \overline{DM}$. Die Tetraeder $ABCM$, $ABDM$. $ACDM$, $BCDM$ sind somit einander volumengleich, das Volumen von $ABCD$ ist das Vierfache des Volumens von $ABCM$, hieraus folgt $\overline{DS} = 4 \cdot \overline{MS}$, $\overline{DM} = 3 \cdot \overline{MS}$.

Tetraeders, das K als Umkugel besitzt, d.h. (wie in der Aufgabe verlangt) dieser Kugel einbeschrieben ist.
Ferner folgt, daß M auch der Mittelpunkt der Umkugel von $ABCD$ ist. Die Umkugelradien der beiden regelmäßigen Tetraeder $PQRS$ und $ABCD$ stehen somit im Verhältnis 1 : 3 . Da sie entsprechende Streckenlängen in den einander ähnlichen Körpern $PQRS$ und $ABCD$ sind, stehen deren Volumina im Verhältnis der dritten Potenzen:

$$V_2 : V_1 = 1 : 27 .$$

In anderen Lösungsvarianten kann man mehr Gebrauch vom Strahlensatz machen. Zum Beispiel kann man (nachdem M als Höhenschnittpunkt von $ABCD$ und P, Q, R, S als Höhenschnittpunkte von BCD, ACD, ABD, ABC geklärt sind) wegen $\overline{FS} : \overline{FA} = \overline{FP} : \overline{FD}$, also $PS \parallel DA$, das Kantenverhältnis $\overline{PS} : \overline{DA} = \overline{FS} : \overline{FA} = 1 : 3$ der Tetraeder erhalten.

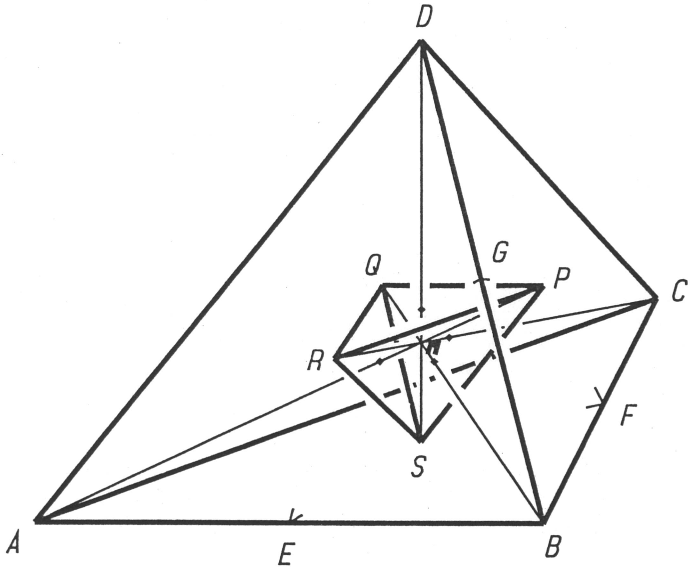

Abb. L341045

341046 Lösung: 7 Punkte

Da Peripheriewinkel über den gleichlangen Bögen AB, BC, CD, DE des Kreises k (siehe Abb. L341046) einander gleichgroß sind, gilt

$$\overline{\angle ACB} = \overline{\angle ADB} = \overline{\angle TDB} \tag{1}$$
$$= \overline{\angle BAC} = \overline{\angle BAS} \tag{2}$$
$$= \overline{\angle CAD} = \overline{\angle SAT} \tag{3}$$
$$= \overline{\angle DBE} = \overline{\angle DBT} = \overline{\angle SBT} . \tag{4}$$

Nach (3), (4) ist $ABST$ ein Sehnenviereck; für die Peripheriewinkel über dem Bogen BS seines Umkreises gilt daher

$$\overline{\angle BAS} = \overline{\angle BTS} . \tag{5}$$

Nach (1),(2),(4),(5) sind die Dreiecke ABC und TSB einander ähnlich, also gilt

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{ST} : \overline{BT} \ . \tag{6}$$

Aus dem Außenwinkelsatz für Dreieck DTB sowie aus (1),(2),(3),(4) folgt

$$\begin{aligned} \overline{\angle\, ATB} &= \overline{\angle\, TDB} + \overline{\angle\, DBT} \\ &= \overline{\angle\, BAS} + \overline{\angle\, SAT} = \overline{\angle\, BAT} \ , \end{aligned}$$

also ist Dreieck ABT gleichschenklig mit $\overline{AB} = \overline{BT}$. (7)

Aus (6) und (7) folgt, wie behauptet, $\overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{ST}$.

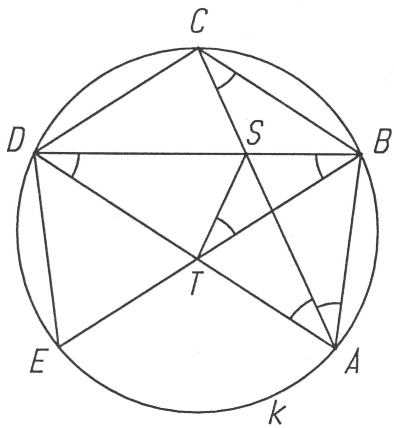

Abb. L341046

Vorschläge zur Punktverteilung

341044

Schluß auf die beiden möglichen Funktionswerte für f 3
Weitere begründende Beschreibung eines geforderten Funktionenpaares 3
6

341045

Ausreichend (z.B. anschaulich) geklärte Lageverhältnisse von M, P, Q, R, S 2
Herleitung des Streckenverhältnisses 1 : 3 (oder gleichwertig nutzbare Aussage) 3
Schluß auf das Volumenverhältnis 2
7

341046

Herleitung von verwendbaren Winkelrelationen wie (1)-(5) 2
“ einer “ Beziehung zwischen Strecken, z.B. (6) 3
“ einer weiteren “ “ “ , z.B. (7),
und abschließende Herleitung der zu beweisenden Gleichung 2
7