34. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe (Länder-Olympiade)
Lösungen
Klasse 10
1. Tag

341031 Lösung: 6 Punkte

1.Lösungsweg: Für jede natürliche Zahl n ist $9^n = \left(3^n\right)^2$ das Quadrat einer ungeraden Zahl; d.h., es gibt jeweils zu n eine natürliche Zahl k mit $3^n = 2k+1$, also $9^n + 1 = (2k+1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$. Daher ist $9^n + 1$ nicht durch 4 und folglich auch nicht durch 100 teilbar; die Zifferndarstellung von $9^n + 1$ endet also nicht auf mehr als eine Null.

2.Lösungsweg: Die letzten zwei Ziffern von 9^n $(n = 0,1,2,\ldots)$ sind

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
letzte 2 Ziffern von 9^n	01	09	81	29	61	49	41	69	21	89	01

Von da an wiederholen sich diese Ziffernpaare periodisch. Da keines von ihnen 99 lautet, endet keine der Zahlen $9^n + 1$ auf zwei Nullen.

Variante: Die Einerziffer ist stets abwechselnd 1 oder 9, die Zehnerziffer ist gerade. Beweis: Für $n = 0$ trifft es zu. Wenn es für ein n zutrifft, so auch für $n+1$; denn das Neunfache von 1 bzw. 9 ist 9 bzw. 81; und das Neunfache einer geraden Zehnerziffer, vermehrt um den Übertrag 0 bzw. 8, ist gerade.

341032 Lösung: 7 Punkte

Setzt man $123456789 = x$, so ist die zu berechnende Zahl gleich

$$\begin{aligned}(x-4)\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+7)-(x-7)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+4) &= \left(x^2-6x+8\right)\cdot\left(x^2+6x-7\right)-\left(x^2-6x-7\right)\cdot\left(x^2+6x+8\right)\\ &= x^4-35x^2+90x-56-\left(x^4-35x^2-90x-56\right)\\ &= 180x\\ &= 22222222020.\end{aligned}$$

341033 Lösung: 7 Punkte

(a) Für jede Anordnung der Augenzahlen auf den Flächen des Oktaeders kann durch eine Drehung des Oktaeders erreicht werden, daß die 1 etwa auf die Fläche vorn/rechts/oben (siehe Abb. L3410033) kommt. Damit ist wegen der Vereinbarung zugleich die 8 auf die Fläche hinten/links/unten gebracht. Nun kann man noch durch eine Drehung, die jede dieser beiden Flächen in sich überführt, die 2 oder die 7 auf die Fläche vorn/rechts/unten bringen und damit zugleich die 7 bzw. die 2 auf die Fläche hinten/links/oben.

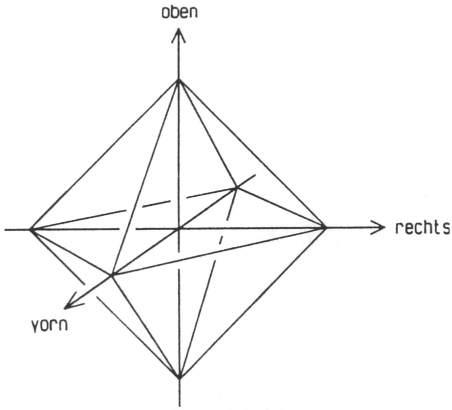

Abb. L341033

Nach der Durchführung dieser Drehungen ist die Lage des Oktaeders durch keine Drehung mehr zu ändern. Daher wird nun jede zu betrachtende Anordnung genau einmal erhalten, wenn die 3 auf eine beliebige der vier noch freien Flächen kommt, die 6 ihr gegenüber; und dann die 4 auf eine der beiden nun noch freien Flächen, die 5 ihr gegenüber.

Somit gab es folgende Wahlmöglichkeiten zum Anordnen der Augenzahlen auf die Flächen: 2 Möglichkeiten (die 2 oder die 7 nach vorn/rechts/unten), dann jeweils 4 Möglichkeiten (die 3 auf eine von vier Flächen), dann noch jeweils 2 Möglichkeiten (die 4 auf eine von zwei Flächen). Also ist die gesuchte Anzahl von Anordnungen $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$.

(b) Hier hat man, nachdem die 1 vorn/rechts/oben steht, für die Fläche hinten/links/unten 7 Zahlen zur Verfügung. Betrachtet man nun eine der sechs noch nicht vergebenen Zahlen, so gibt es für sie vermittels einer Drehung, die jede der eben genannten Flächen in sich überführt, die 2 Möglichkeiten, entweder nach vorn/rechts/unten oder nach hinten/links/oben zu kommen. Danach kann man die restlichen 5 Zahlen auf die noch nicht belegten fünf Flächen beliebig verteilen. So ergibt sich die Anzahl $7 \cdot 2 \cdot 5! = 1680$.

<u>2.Lösungsweg:</u>

(b) Man kann zunächst 8! Anordnungen bilden, ohne auf die Verschiedenheit im Sinne der Aufgabenstellung zu achten. Von ihnen sind jeweils solche nicht voneinander verschieden, die durch eine Drehung des Oktaeders ineinander übergehen. Die Zahl aller von einer Ausgangsstellung durch Drehung erreichbaren Stellungen ist $8 \cdot 3$; denn erstens kann man eine bestimmte Fläche (z.B. die Fläche vorn/rechts/oben) in 8 verschiedene Flächen überführen, und zweitens hat man dann noch für die Wahl einer angrenzenden Fläche 3 Möglichkeiten. (Man kann auch so argumentieren: Für das Oktaeder gibt es ebenso viele Drehungen wie für denjenigen Würfel, der entsteht, wenn man durch jede Oktaederecke die zur Verbindungsstrecke mit der Gegenecke senkrechte Ebene legt. Der Würfel gestattet aber, wie z.B. in 341021 gezeigt wurde, $6 \cdot 4$ Drehungen.)
Daher ist die in (b) gesuchte Anzahl $8! : 24 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

(a) Hier hat man zunächst $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$ Möglichkeiten, vier Zahlen, von denen keine zwei die Summe 9 ergeben, auf vier Flächen zu legen, die an einer betrachteten Oktaederecke (z.B. vorn) zusammenstoßen; das gibt eine Gesamtzahl von $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$ in (a) zulässigen Verteilungen ohne Beachtung der Verschiedenheitsforderung. Mit deren Beachtung ergibt sich daher die Anzahl $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 : 24 = 16$.

Vorschläge zur Punktverteilung

<u>341031</u>

Vorbereitender Schritt, z.B. Übergang zur Darstellung $(2k+1)^2$
oder Folge der Paare von Einer- und Zehnerziffer 3
Abschließende Beweisführung 3
6

<u>341032</u>

Nutzbare Einführung einer Hilfsgröße, z.B. $x = 123456789$ (oder vergleichbares Vorgehen) 2
Weitere Rechenschritte (z.B.: Ausmultiplizieren, Zusammenfassen, abschließ.Multiplikation
2+2+1 Pkte.) 5
7

<u>341033</u>

(a) Ermittlung der Anzahl 16, z.B.:
2 Möglichkeiten für 2 oder 7; 4 Möglichkeiten für 3; 2 Möglichkeiten für 4 je 1 Pkt. 3
(b) Ermittlung der Anzahl 1680
(entsprechend z.B. 2+1+1 Pkte.) 4
7

34. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe (Länder-Olympiade)
Lösungen
Klasse 10
2. Tag

341034 Lösung: 7 Punkte

I. Jede positive ganze Zahl $n \le 6$ ist „freundlich". Beweis:
Es seien 25 Blättchen so ausgewählt, daß jede der n Farben mit mindestens einem Blättchen vertreten ist. Die Anzahl k derjenigen Farben, die in dieser Auswahl mit je einer ungeraden Blättchenzahl vertreten sind, muß selbst ungerade sein (denn wäre k gerade, so wäre die Summe der Blättchenzahlen aller Farben eine gerade Zahl; sie ist aber die Zahl 25). Hiernach und wegen $k \le n \le 6$ ist k eine der Zahlen 1, 3, 5 . Daher kann man von jeder dieser k Farben je genau ein Blättchen auf eines derTeilquadrate legen, die von AC durchquert werden; und danach sind entweder (im Fall $k=5$) alle diese Teilquadrate belegt, oder (für $k=1$, $k=3$) es bleibt eine gerade Anzahl dieser 5 Teilquadrate frei. Also kann man diese Teilquadrate so mit noch verfügbaren Blättchen der Auswahl belegen, daß man jede dabei herangezogene Farbe in gerader Blättchenzahl verwendet. Weiter folgt, daß dann alle Farben unter den noch verfügbaren Blättchen in gerader Blättchenzahl übrigbleiben, da von jeder der k zu Beginn ungeradzahlig vetretenen Farben bereits eine ungerade Zahl von Blättchen gelegt wurde.
Damit aber ist erreicht, daß man jedes zu AC symmetrische Paar der nicht von AC durchquerten Teilquadrate mit einander gleichfarbigen Blättchen belegen kann. Dadurch entsteht insgesamt ein zu AC symmetrisches farbiges Muster, w.z.b.w.

II. Keine der ganzen Zahlen n mit $7 \le n \le 25$ ist „freundlich". Beweis:
Für jede ganze Zahl n mit $7 \le n \le 25$ ist beispielsweise folgende Auswahl möglich: Man wählt von einer Farbe $26-n$ Blättchen. Wegen $n \le 25$, also $26-n \ge 1$ ist damit diese Farbe mit mindestens einem Blättchen vertreten. Von den anderen $n-1$ Farben wählt man je genau ein Blättchen aus. Wegen $(26-n)+(n-1)=25$ hat man damit insgesamt eine Auswahl von genau 25 Blättchen getroffen.
Für diese Auswahl ist es aber, wie behauptet, nicht möglich, die Blättchen so zu verteilen, daß ein bezüglich AC symmetrisches Muster entsteht; denn in jedem solchen Muster können höchstens die Farben auf den fünf von AC durchquerten Teilquadraten in ungerader Blättchenzahl vorkommen, während die hier getroffene Auswahl mindestens die letzten $n-1 \ge 6$ Farben in der ungeraden Blättchenzahl 1 enthält.

Mit I. und II. ist gezeigt: Die „freundlichen" unter den positiven ganzen Zahlen $n \le 25$ sind genau die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 .

341035 Lösung: 6 Punkte

Es gilt die folgende Aussage (*):

(*) Wenn sich auf einer Geraden mindestens zwei „rationale" Punkte befinden, so ist es nicht möglich, daß sich auf dieser Geraden sowohl ein „irrationaler"

Punkt als auch ein „gemischter" Punkt befindet..

Beweis: Sind $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$ die Koordinaten zweier voneinander verschiedener Punkte einer Geraden und sind dabei x_1, y_1, x_2, y_2 rationale Zahlen, so gilt:

Im Fall $x_1 = x_2$ hat die Gerade $x = x_1$ als eine Gleichung. Für jeden Punkt $(x ; y)$ der Geraden gilt dann: Ist y rational, so ist der Punkt „rational"; ist y irrational, so ist der Punkt „gemischt". Also hat die Gerade keinen „irrationalen" Punkt.

Entsprechend folgt auch im Fall $y_1 = y_2$, daß die Gerade keinen „irrationalen" Punkt hat.

Gilt aber sowohl $x_1 \neq x_2$ als auch $y_1 \neq y_2$, so hat die Gerade $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$ als eine Gleichung. Für jeden Punkt $(x ; y)$ der Geraden gilt dann: Ist x rational, so auch y. Ist x irrational, so auch $x - x_1$; wegen des rationalen und von 0 verschiedenen Faktors $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ist dann auch $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$ und folglich auch y irrational. Die Gerade hat somit nur „rationale" und „irrationale" Punkte, aber keinen „gemischten" Punkt.

Aus der damit bewiesenen Aussage (*) ergibt sich:

(a) Es gibt keine Gerade, auf der sich von jeder der drei Sorten jeweils mehr als ein Punkt befindet.

(b1) Es gibt keine Gerade, auf der sich genau ein „irrationaler" Punkt sowie mehr als ein „rationaler" Punkt und mehr als ein „gemischter" Punkt befindet.

(b2) Es gibt keine Gerade, auf der sich genau ein „gemischter" Punkt sowie mehr als ein „rationaler" Punkt und mehr als ein „irrationaler" Punkt befindet.

Ferner gilt:

(b3) Es gibt eine Gerade, auf der sich genau ein „rationaler" Punkt sowie mehr als ein „irrationaler" Punkt und mehr als ein „gemischter" Punkt befindet.
Zum Beweis genügt es, das Vorhandensein solcher Punkte für ein Beispiel einer Geraden zu bestätigen. Ein solches Beispiel ist etwa die Gerade mit $y = x \cdot \sqrt{2}$ als Gleichung. Auf dieser Geraden liegt nämlich der „rationale" Punkt $(0;0)$; für jeden anderen ihrer Punkte (x , y) dagegen gilt:
Ist x rational (und von 0 verschieden), so ist der Punkt (x , y) „gemischt"; von dieser

Art gibt es mehr als einen Punkt.

Ist x irrational, so ist der Punkt $(x\,;y)$ entweder „gemischt" oder „irrational", je nachdem, ob sich y rational oder irrational ergibt; das Letztgenannte kommt ebenfalls für mehr als einen Punkt vor, zum Beispiel für die Punkte $(\sqrt{3}\,;\sqrt{6})$ und $(\sqrt{5}\,;\sqrt{10})$.

<u>341036 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

I. Nach dem Satz, daß in der Ebene der geradlinige Weg zwischen zwei Punkten die kleinste Länge hat, gilt:
Ein zulässiger Weg von S nach Z kann höchstens dann möglichst kleine Länge haben, wenn einer der folgenden Fälle (A), (B), (C) vorliegt:

(A) Der Weg führt über einen Punkt L der Kante FG, und zwar ist der Punkt L (unter Berücksichtigung des gleichen Abstandes x von S zu EF und von Z zu BF) sowohl der Fußpunkt des Lotes von S auf FG als auch der Fußpunkt des Lotes von Z auf FG . Dieser Weg hat – unabhängig von x – die Länge $a+b$.

(B) Der Weg führt über einen Punkt P der Kante EF und einen Punkt Q der Kante BF, und zwar erfüllt er die folgende Bedingung: Bringt man die Flächen $ABFE$, $EFGH$, $BCGF$ gemäß Abb. L341036 in eine Ebene (hierzu wird längs FG aufgeschnitten; danach unterscheiden wir L_1 , G_1 von L_2 , G_2), so schneidet die Strecke SZ die Gerade durch E, G_2 zwischen E und F und (äquivalent hiermit) die Gerade durch B , G_1 zwischen B und F ; und P bzw. Q sind diese beiden Schnittpunkte. Ist diese Bedingung erfüllt, so hat der genannte Weg nach dem Satz des Pythagoras die Länge $\sqrt{(a+x)^2+(b+x)^2}$.

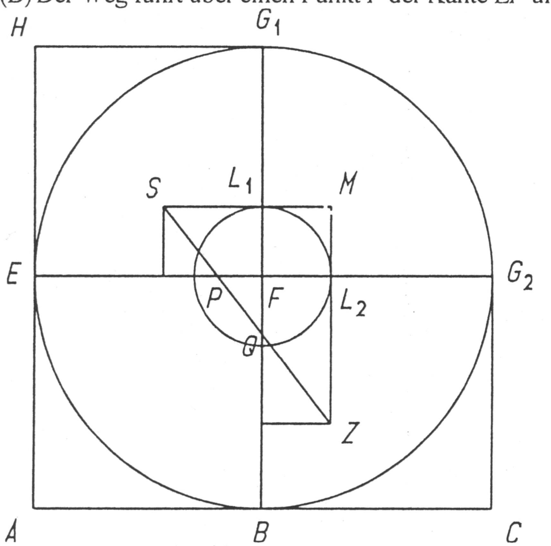

Abb. L341036

© Der Weg führt über einen Punkt U der Kante GH und einen Punkt V der Kante CG. Indem man in (B) überall x durch $1-x$ ersetzt, folgt entsprechend: Erfüllt der Weg eine Schnittbedingung für U und V wie in (B) für P und Q, so hat er die Länge $\sqrt{(a+1-x)^2+(b+1-x)^2}$.

(Für Wege, die noch andere Würfelkanten treffen, läßt sich mit der Dreiecksungleichung nachweisen, daß sie länger als einer der Wege aus (A), (B) oder (C) sind.)

Daher können höchstens dann zwei verschiedene Wege dieselbe möglichst kleine Länge haben, wenn x eine der Gleichungen

$$(a+x)^2+(b+x)^2=(a+b)^2 ,$$
(AB)
$$(a+1-x)^2+(b+1-x)^2=(a+b)^2 ,$$
(AC)
$$(a+x)^2+(b+x)^2=(a+1-x)^2+(b+1-x)^2$$
(BC)

erfüllt.
Im Fall (BC) ist die in (B) und (C) angegebene Länge jedoch nicht möglichst klein, wie man folgendermaßen zeigen kann: Aus (BC) folgt $2x\cdot(2+2a+2b)=2+2a+2b$, also $x=\frac{1}{2}$. Für diesen Wert ist aber

$$(a+x)^2+(b+x)^2=a^2+b^2+a+b+\frac{1}{2} ,$$

und nun wird gezeigt, daß dies größer als $(a+b)^2$ ist. Es gilt nämlich

$$4ab<1+2a+2b . \qquad (1)$$

Beweis: Nach Voraussetzung über a und b kann o.B.d.A. $0<a\leq b<1$ angenommen werden. Hiernach folgt $4ab<4a\cdot 1\leq 2a+2b<1+2a+2b$, also (1).

Aus (1) erhält man dann $2ab+a^2+b^2<\frac{1}{2}+a+b+a^2+b^2$, wie gezeigt werden sollte.

Also können nur Werte x (mit $0<x<1$), die (AB) oder (AC) erfüllen, den Bedingungen der Aufgabe genügen.

II. Wenn x die Gleichung (AB) erfüllt, so folgt

$$x^2+(a+b)\cdot x-ab=0 , \qquad (2)$$

und die positive Lösung dieser Gleichung ist $x=\frac{1}{2}\left(-(a+b)+\sqrt{a^2+6ab+b^2}\right)$. (3)

Für diesen Wert beweist man nun erstens: Mit ihm ist die in (B) genannte Schnittbedingung erfüllt. Aus (2) und $x>0$ folgt nämlich

$$x^2<ab ; \qquad (4)$$

diese Ungleichung ist aber äquivalent zu der Schnittbedingung, wie man z.B. folgendermaßen zeigen kann:
Ist M der Schnittpunkt der beiden durch S , L_1 bzw. durch Z , L_2 gelegten Geraden, so folgt aus dem Strahlensatz $\overline{L_2P}:\overline{MS}=\overline{ZL_2}:\overline{ZM}$, $\overline{L_2P}:(a+x)=b:(b+x)$, $\overline{L_2P}=\frac{(a+x)\cdot b}{b+x}$,

und daher ist die Bedingung $\overline{L_2 P} > x$ äquivalent mit $(a+x)\cdot b > (b+x)\cdot x$ und dies mit $ab > x^2$.

Zweitens beweist man: Aus (3) folgt $$x < \frac{1}{2}\,. \qquad (5)$$

Wegen (1) gilt nämlich $6ab + a^2 + b^2 < 1 + 2a + 2b + 2ab + a^2 + b^2$, also $\sqrt{a^2 + 6ab + b^2} < 1 + a + b$, womit in der Tat der Schluß von (3) auf (5) gelingt. Die Ungleichung (5) sichert aber, daß die nach (AB) gemeinsame Weglänge kleiner als die in (C) erhaltene Weglänge ist; denn aus (5) folgt
$$4ax + 4bx + 4x < 2a + 2b + 2\,,$$
nach Addition von $a^2 - 2ax + b^2 - 2bx + 2x^2$ auf beiden Seiten der Ungleichung also
$$(a+x)^2 + (b+x)^2 < (a+1-x)^2 + (b+1-x)^2\,.$$

Damit ist bewiesen: Der Wert x aus (3) erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

Da Fall (C) aus Fall (B) zu erhalten war, indem x durch $1-x$ ersetzt wurde, ergibt sich: Die Bedingungen der Aufgabe werden ebenfalls erfüllt, wenn x die positive Lösung der Gleichung (AC) ist; und diese Lösung ist zu erhalten, indem man in der Lösung (3) von (AB) ebenfalls x durch $1-x$ ersetzt. Das führt auf den Wert
$$x = \frac{1}{2}\left(2 + a + b - \sqrt{a^2 + 6ab + b^2}\right). \qquad (6)$$

Mit I. und II. ist bewiesen: Die Bedingungen der Aufgabe werden genau von den beiden in (3) und in (6) angegebenen Werten erfüllt.

Bemerkungen: Es ist in mehrfacher Weise möglich, verbale und rechnerische Teile dieser Lösungsdarstellung durch anschauliche Argumente zu ersetzen. So kann z.B. die Einsicht, daß genau mit (AB) und (AC) verschiedene, aber gleichlange minimale Wege resultieren, folgendermaßen gewonnen werden: Man denke zunächst für festes $x < \frac{1}{2}$ den Weg, der aus den Strecken SF und FZ zusammengesetzt ist, auf zweierlei Weisen stetig verkürzt, indem man nämlich den Zwischenpunkt F einerseits längs FB und andererseits längs FG variieren läßt (im obigen Text als Punkt Q bzw. als Punkt L; dabei wird natürlich Q gemäß Abb. L341036 über P erreicht, und L ist zunächst noch nicht der Lotfußpunkt von S auf FG). Dabei denke man sich diese beiden Änderungen so gekoppelt, daß die beiden Wege ($SPQZ$ und SLZ) stets einander gleiche Länge haben. Bei diesem Variieren nimmt die gemeinsame Länge von $SPQZ$ und SLZ so lange streng monoton ab, bis entweder für SLZ der Fall (A) oder für $SPQZ$ der Fall (B) erreicht ist (oder beides zutrifft, also der Fall (AB) vorliegt); danach nimmt die Weglänge wieder zu. Ist der hierbei gewählte Wert x zunächst noch sehr klein, so wird zuerst für $SPQZ$ der Fall (B) erreicht; d.h., es gibt nur einen minimalen Weg, eben $SPQZ$. Kann man weiterhin für x so lange immer größere Werte wählen, bis die eben beschriebene bei festem x erfolgende monotone Abnahme der Länge von $SPQZ$ und SLZ bei Fall (AB) endet und danach in

Zunahme übergeht, so erhält man aus Symmetriegründen bei der Wahl von $1-x$ statt x das Entsprechende für einen Weg $SUVZ$ statt $SPQZ$, so daß das hier geschilderte Erreichen minimaler Weglänge im Fall (AB) gekennzeichnet ist durch $x < 1-x$, also $x < \frac{1}{2}$.

Diese Überlegung zeigt, daß es genügt, (rechnerisch) die Gleichung (AB) zu lösen und nachzuweisen, daß ihre Lösung (3) kleiner als $\frac{1}{2}$ ist; denn ist dies gezeigt, so gibt es einerseits bei der Wahl von x im restlichen Intervall bis $x = \frac{1}{2}$ wieder nur einen minimalen Weg, nämlich SLZ; und andererseits folgt, daß der bei $x = \frac{1}{2}$ wegen der Symmetrie eintretende Fall (BC) größere gemeinsame Weglänge $SPQZ$ und $SUVZ$ erbringt als der vorige Fall (AB) (und als der zu (AB) symmetrische Fall (AC) mit der Lösung (6)).

Eine wie oben gestaltete rechnerische und ausführlich verbale Argumentation und auch eine wie eben hier verbal ausgeführte Wiedergabe anschaulichen Vorgehens wird nicht vom Schüler verlangt. Es soll damit nur erleichtert werden, eventuelle Fehler genauer zu lokalisieren, z.B. wenn (BC) als weitere Lösung behauptet wird oder aus der Darstellung die Einsicht in eine (z.B. anschauungs- und altersgemäße) Widerlegung von (BC) nicht ersichtlich ist.

Vorschläge zur Punktverteilung

341034

Nachweis, daß alle $n \leq 6$ „freundlich" sind, z.B. in den Teilschritten	
Belegung der von AC durchquerten Felder	2
Fortsetzung zu symmetrischem Muster	2
Nachweis, daß alle $n \geq 7$ nicht „freundlich" sind, z.B. in den Teilschritten	
Angabe einer Auswahl von 25 Blättchen	1
Beweis, daß mit dieser Auswahl kein symmetrisches Muster erreichbar ist	2
	7

341035

Nachweise zu (a), (b1), (b2):	
Nichtexistenz von Geraden mit den jeweils zu betrachtenden Sortenverteilungen etwa 2+1+1 Pkte.	4
Nachweis zu (b3): Existenz einer Geraden mit genau einem „rationalen" Punkt und jeweils mehr als einem Punkt der beiden anderen Sorten	2
	6

341036

Ersichtliche Betrachtung der Wegmöglichkeiten (A), (B), (C)	2
Diskussion der Gleichungen (AB), (AC), (BC) oder hierzu gleichwertige Untersuchung ..	2
Rechnerische Gewinnung der beiden Lösungen (3),(6)	1
Einzigkeits- bzw. Minimalitätsnachweis (je nach Vorgehensweise; z.B. Widerlegung zu (BC))	2
	7