Vorlage

34. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe (Kreisolympiade)
Aufgaben
Klasse 10

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

341021

(a) Wie viele verschiedene Verteilungen der Zahlen 1, 2, . . . , 6 auf die sechs Seitenflächen eines Würfels gibt es insgesamt?

(b) Wie viele verschiedene unter diesen Verteilungen gibt es insgesamt, bei denen die zusätzliche Bedingung erfüllt ist, daß für jedes Paar einander gegenüberliegender Seitenflächen die Zahlen auf diesen beiden Flächen die Summe 7 haben?

Hinweis: In (a) und (b) gelten zwei Verteilungen genau dann als voneinander verschieden, wenn sie durch keine Drehung des Würfels ineinander überführt werden können.

341022

Anja und Bernd sprechen darüber, wie man *die an einen Kreis k*, dessen Mittelpunkt M sei, *in einem seiner Punkte P gelegte Tangente t* vollständig ausreichend beschreiben kann.

Anja ist für folgende Beschreibung: t ist diejenige durch P gehende Gerade, die

auf MP senkrecht steht
und *mit k nur den Punkt P gemeinsam hat.*

Bernd meint: Man kann jeweils eine der beiden Bedingungen weglassen, da jede dieser Bedingungen aus der anderen folgt, d. h. da für jeden Kreis k um M und für jeden Punkt P auf k die beiden nachstehenden Sätze (1) und (2) gelten:

(1) Wenn eine durch P gehende Gerade t auf MP senkrecht steht, dann hat sie mit k nur den Punkt P gemeinsam.

(2) Wenn eine durch P gehende Gerade t nur den Punkt P mit k gemeinsam hat, dann steht sie auf MP senkrecht.

Beweisen Sie beide Sätze (1) und (2) !

341023

Jens-Uwe hat einige natürliche Zahlen quadriert, deren Ziffterndarstellung (im dekadischen Positionssystem) nur aus Neunen besteht. Er äußert zu seinem Freund anhand der Ergebnisse von 9^2, 99^2, 999^2 die Vermutung, daß in solchen Ergebnissen niemals mehr als vier verschiedene Ziffern auftreten. Dieser meint nach einigem Überlegen, er könne sogar für jedes Quadrat einer nur aus Neunen bestehenden Zahl (ohne solche Quadrate noch einzeln auszurechnen) die Fragen genau beantworten, *welche Ziffern* darin vorkommen und *an welchen Stellen* sie dort stehen.

Beantworten Sie diese Fragen und beweisen Sie Ihre Antwort!

341024

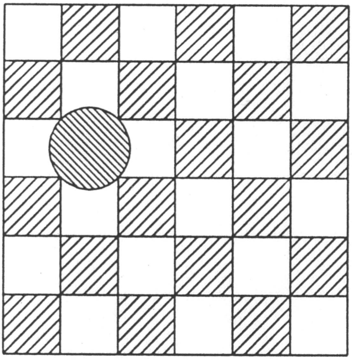

Abb. A 341024

Für jede positive ganze Zahl n denke man sich ein Schachbrett von $2n \times 2n$ Feldern. Beispielsweise zeigt Abb. A 341024 ein solches Schachbrett für $n = 3$. Um jedes schwarze Feld denke man sich den Umkreis konstruiert. (Abb. A 341024 zeigt einen solchen Umkreis.)

(a) Beweisen Sie, daß für jedes positive ganzzahlige n die folgende Aussage gilt:
Der Flächenanteil des Schachbrettes, der von keinem der Kreise überdeckt wird, beträgt mehr als 20 % .

(b) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl n, für die der Flächenanteil des Schachbrettes, der von keinem der Kreise überdeckt wird, weniger als 25 % beträgt!

34. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen
Klasse 10

341021 Lösung: 9 Punkte

(a) Für jede Verteilung kann durch eine Drehung des Würfels erreicht werden, daß die 1 etwa auf die unten liegende Fläche kommt. Für die Belegung der oben liegenden Fläche gibt es dann genau 5 Möglichkeiten. Bei jeder dieser Möglichkeiten kann man eine noch nicht verteilte Zahl wählen und diese Zahl durch eine Drehung des Würfels, die die unten und oben liegenden Flächen jeweils in sich überführt, auf die vorn liegende Fläche bringen.
Nach der Wahl der hier genannten beiden Drehungen ist die Stellung des Würfels gegenüber Drehungen festgelegt. Jede der gesuchten Verteilungen wird daher genau einmal erhalten, wenn man die noch nicht verwendeten Zahlen auf die rechte, hintere und linke Fläche verteilt; hierfür gibt es je $3! = 6$ Möglichkeiten.
Als Gesamtzahl aller verschiedenen Verteilungen hat sich damit $5 \cdot 6 = 30$ ergeben.

(b) Diesmal ist mit der Drehung, die die Zahl 1 auf die untere Fläche bringt, zugleich die 6 auf die obere Fläche gebracht. Mit der Drehung, die eine noch nicht verteilte Zahl (zum Beispiel die 2) auf die vordere Fläche bringt, ist zugleich ihre Ergänzung zu 7 (im Beispiel die 5) auf die hintere Fläche gebracht. Also wird nun jede der gesuchten Verteilungen genau einmal erhalten, wenn man die beiden noch nicht verwendeten Zahlen, die zwangsläufig auch die Summe 7 haben (im Beispiel die 3 und die 4) auf die rechte und linke Fläche verteilt; hierfür gibt es $2! = 2$ Möglichkeiten. Dies ist demnach die Gesamtzahl aller in (b) gesuchten Verteilungen.

2. Lösungsweg:

(a) Man kann zunächst $6!$ Verteilungen bilden, ohne auf die - im Sinne der Aufgabenstellung verstandene - Verschiedenheit zu achten. Von ihnen sind jeweils solche *nicht* voneinander verschieden, die durch eine Drehung des Würfels ineinander übergehen. Die Zahl aller von einer Ausgangsstellung durch Drehung erreichbaren Stellungen ist $6 \cdot 4$; denn erstens kann man eine bestimmte (z. B. die untere) Fläche in 6 verschiedene Flächen überführen, und zweitens hat man dann noch für die Wahl einer angrenzenden Fläche 4 Möglichkeiten.
Daher ist die in (a) gesuchte Anzahl $6! : (6 \cdot 4) = 30$.

(b) Hier hat man zunächst $6 \cdot 4 \cdot 2$ Möglichkeiten, drei Zahlen, von denen keine zwei die Summe 7 ergeben, auf drei Flächen zu legen, die an einer betrachteten Würfelecke (z. B. unten links vorn) zusammenstoßen; das gibt eine Gesamtzahl von $6 \cdot 4 \cdot 2$ in (b) zulässigen Verteilungen ohne Beachtung der Verschiedenheitsforderung.
Mit deren Beachtung ergibt sich daher die Anzahl $(6 \cdot 4 \cdot 2) : (6 \cdot 4) = 2$.

341022 Lösung: 10 Punkte

Beweis zu (1). Aus der Voraussetzung, daß t die auf MP senkrechte Gerade durch P ist (siehe Abb. L 341022 a), folgt:
Für jeden von P verschiedenen Punkt P' auf t ist MPP' ein rechtwinkliges Dreieck mit MP' als Hypotenuse; also gilt $\overline{MP'} > \overline{MP}$.
Da $\overline{MP}$ der Radius des Kreises k ist, liegt somit P' nicht auf k.
Also hat t nur den Punkt P mit k gemeinsam.

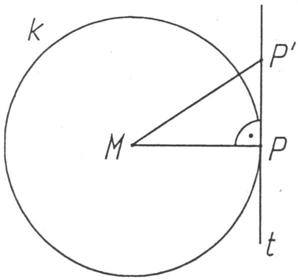

Abb. L 341022 a

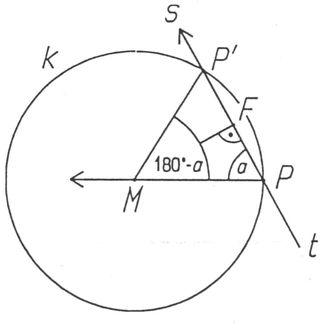

Abb. L 341022 b

Beweis zu (2), d. h. dazu, daß aus der Voraussetzung, eine Gerade t habe mit k nur den Punkt P gemeinsam, $t \perp MP$ folgt:
Angenommen, t wäre nicht senkrecht auf MP; dann hätte das von M auf t gefällte Lot (siehe Abb. L 341022 b) einen von P verschiedenen Fußpunkt F. Durch Verlängerung der Strecke PF über F hinaus um die Länge $\overline{PF}$ würde man folglich einen ebenfalls von P verschiedenen Punkt P' erhalten. Für ihn wäre wegen $\overline{P'F} = \overline{PF}$ sowie $\overline{MF} = \overline{MF}$ und $\angle MFP' = \angle MFP = 90°$ nach dem Kongruenzsatz **sws** dann $\Delta MFP' \cong \Delta MFP$, also $\overline{MP'} = \overline{MP}$. Daher läge auch P' auf k; das widerspricht der Voraussetzung, daß t mit k nur den Punkt P gemeinsam hat.
Also war die Annahme, t wäre nicht senkrecht auf MP, falsch; d. h., $t \perp MP$ ist bewiesen.

<u>Beweisvarianten:</u> In der (indirekten) Beweisführung zu (2) kann die Gewinnung eines von P verschiedenen $P' \in k \cap t$ auch so erfolgen: Der Strahl aus P durch M bildet mit einem der beiden von P ausgehenden Strahlen, der s genannt sei, einen Winkel einer Größe $\alpha < 90°$. Trägt man an MP in M nach derjenigen Seite von MP, auf der s liegt, den Winkel der Größe $180° - 2\alpha$ an, so schneidet sein zweiter Schenkel wegen $\alpha + (180° - 2\alpha) < 180°$ den Strahl s in einem Punkt P', für den (wegen $180° - 2\alpha > 0$) $P' \neq P$ gilt. Im Dreieck MPP' hat nach dem Innenwinkelsatz auch der Winkel bei P' die Größe α; nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes ist folglich $\overline{MP'} = \overline{MP}$.
Auch zu Satz (1) ist eine indirekte Beweisführung mit Bezugnahme auf Abb. L 341022 b möglich: Hätte t mit k außer P noch $P' \neq P$ gemeinsam, so wäre MPP' ein mit $\overline{MP'} = \overline{MP}$ gleichschenkliges Dreieck. Darin müßte der Basiswinkel $\angle MPP'$ kleiner als $90°$ sein, was der Voraussetzung $t \perp MP$ widerspricht.

<u>341023 Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>
Als Antwort auf die genannten Fragen kann folgende Beschreibung dienen:

> Das Quadrat der Zahl aus n Neunen ist diejenige Zahl, deren Zifferndarstellung erst $n-1$ Neunen, dann eine Acht, dann $n-1$ Nullen und dann eine Eins enthält.

Beweis: Die Zahl aus n Neunen ist $10^n - 1$. Ihr Quadrat ist

$$(10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1 = (10^n - 2) \cdot 10^n + 1 .$$

Die Zifferndarstellung der Zahl $10^n - 2$ enthält erst $n-1$ Neunen, dann eine Acht. Das anschließende Multiplizieren mit 10^n und Addieren von 1 bewirkt dann noch das Anhängen von $n-1$ Nullen und einer Eins.

341024 Lösung: 13 Punkte

Haben die Felder des Schachbretts o. B. d. A. die Seitenlänge 1, so hat der Umkreis jedes Feldes den Radius $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$, also den Flächeninhalt $\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$. Jeder solche Kreis ragt in 4 gleichgroßen Segmenten über das Feld hinaus; jedes dieser Segmente hat folglich den Flächeninhalt $\left(\frac{\pi}{2}-1\right):4 = \frac{\pi-2}{8}$.

Die Flächen je zweier Umkreise schwarzer Felder haben entweder keinen Punkt oder genau einen Punkt gemeinsam, in dem sie sich von außen berühren. Daher erhält man den von keinem der Kreise überdeckten Flächenanteil des Schachbretts, wenn man vom Flächeninhalt des Schachbretts die Differenz aus dem Flächeninhalt der $2n^2$ Kreise und der $4n$ über das gesamte Schachbrett hinausragenden Segmente subtrahiert. Der Flächenanteil beträgt also

$$(2n)^2 - \left(2n^2\cdot\frac{\pi}{2} - 4n\cdot\frac{\pi-2}{8}\right) = n^2\cdot(4-\pi) + \frac{n}{2}\cdot(\pi-2).$$

(a) Wegen $2 < \pi < 3{,}2$ gilt $\pi - 2 > 0$ und $16 - 5\pi > 0$; hiernach gilt für alle $n > 0$ die Ungleichung

$$2n\cdot(16-5\pi) + 5\cdot(\pi-2) > 0.$$

Addition von $8n$ und anschließende Multiplikation mit $\frac{n}{10}$ ergibt

$$n^2\cdot(4-\pi) + \frac{n}{2}\cdot(\pi-2) > \frac{(2n)^2}{5};$$

d. h., der genannte Flächenanteil ist größer als ein Fünftel des gesamten Schachbretts, w. z. b. w.

(b) Der Anteil ist genau dann kleiner als ein Viertel des gesamten Schachbretts, wenn

$$n^2\cdot(4-\pi) + \frac{n}{2}\cdot(\pi-2) < \frac{(2n)^2}{4}$$

gilt. Dies ist wegen $n > 0$ äquivalent mit

$$2n\cdot(4-\pi) + \pi - 2 < 2n$$

und dies wegen $\pi - 3 > 0$ mit

$$n > \frac{\pi-2}{2\cdot(\pi-3)}.$$

Wegen $3{,}141 < \pi < 3{,}142$ gilt einerseits $1{,}141 < \pi - 2 < 1{,}142$, andererseits $0{,}284 > 2\cdot(\pi-3) > 0{,}282$, also

$$4{,}01 < \frac{1{,}141}{0{,}284} < \frac{\pi-2}{2\cdot(\pi-3)} < \frac{1{,}142}{0{,}282} < 4{,}05.$$

Die kleinste ganze Zahl n, für die $n > \dfrac{\pi - 2}{2 \cdot (\pi - 3)}$ gilt, ist folglich $n = 5$. Dies ist somit die in (b) gesuchte Zahl.

Bemerkung: Abschätzungen wie $16 - 5x > 0$, $4 < \dfrac{\pi - 2}{2 \cdot (\pi - 3)} < 5$ erfordern zum Beweis eine *Abschätzung für* π, nicht nur die Angabe eines Näherungswertes, z. B. (etwa mit Taschenrechner ermittelt) $\dfrac{\pi - 2}{2 \cdot (\pi - 3)} \approx 4{,}031$. Allerdings kann akzeptiert werden, wenn z. B. eine solche Angabe durch die Betrachtung ergänzt wird, daß bei der Berechnung dieses Näherungswertes die Fortpflanzung des Rundungsfehlers genügende Kleinheit des resultierenden Fehlers ergibt, um den Schluß auf $4 < \dfrac{\pi - 2}{2 \cdot (\pi - 3)} < 5$ zu rechtfertigen.

Vorschläge zur Punktverteilung

341021

(a) Ermittlung der Anzahl 30
(z. B. Fünf Möglichkeiten bei Festlegung der 1; sechs Verteilungen für jede: 3+2 Punkte. oder 6! Verteilungen; zu dividieren durch Würfeldrehungs-Anzahl $6 \cdot 4$ 2+3 Punkte) 5

(b) Ermittlung der Anzahl 2 (entsprechend z. B.: 2+2 Punkte) 4

9

341022

Beweis zu (1) (z. B. Nachweis zu $\overline{MP'} > \overline{MP}$; Schluß auf $P' \notin k$: 2+2 Punkte) 4

Beweis zu (2) (z. B. in indirektem Beweis Existenz eines $P' \neq P$ mit $\overline{MP'} = \overline{MP}$; abschließende Herleitung eines Widerspruchs zu $t \cap k = \{P\}$ 4+2 Punkte) 6

10

341023

Rechnerischer Ausdruck (möglicherweise verbal gefaßt) für die Zahl aus n Neunen mit beliebigem n 2

Umformung eines resultierenden Ausdrucks für das Quadrat; Interpretation zu Angabe der Ziffernfolge (z. B. 3+3 Punkte) 6

8

341024

Ermittlung des Flächenanteils (z. B. Segmentfläche; Anzahlen der Kreise und der über das Schachbrett ragenden Segmente; Formel: 2+1+1 Punkte) 4

(a) Beweis, daß der Flächenanteil größer als 20 % der Schachbrettfläche ist 4

(b) Ermittlung des kleinsten n, das die Bedingung erfüllt,den Flächenanteil kleiner als 25 % zu machen
(z. B. Auflösung einer mit dieser Bedingung äquivalenten Gleichung nach n; ...... Abschätzung des erhaltenen Terms; Schluß auf das gesuchte kleinste n: 2+2+1 Punkte).. 5

13