lrdanft

34. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Deutschland-Olympiade)
Aufgaben
Klasse 9
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

340941

Die Bewohner des Planeten Quadron unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau vier verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau vier Völkerstämme. Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau vier Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.
Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 16 Sitze in quadratförmiger Formierung zu vier Zeilen und vier Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und in jeder Spalte müssen alle vier Völkerstämme und alle vier Geschlechter vertreten sein.
Geben Sie eine mögliche Sitzordnung an und bestätigen Sie, daß bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

340942

Zeigen Sie. daß die Zahl $z = 7 + 7^3 + 7^5 + 7^7 + \cdots + 7^{93} + 7^{95}$ durch 336 teilbar ist!

340943

Auf der Seite AB eines Quadrates $ABCD$ werde ein Punkt $X \neq A$ gewählt. Dann werde das Quadrat durch die Strecken AC und XD in vier Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, die Wahl von X so zu treffen, daß es natürliche Zahlen p, q und r gibt, für die die Flächeninhalte dieser Teilflächen in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis $1 : p : q : r$ stehen!

Umlauft

34. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Deutschland-Olympiade)
Aufgaben
Klasse 9
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

340944

Axel führt einen Kartentrick vor. Er benutzt dazu ein Skatspiel, bestehend aus jeweils 4 Karten der folgenden Arten, denen er folgende Augenwerte zuteilt:

Art der Karte	7	8	9	10	Bube	Dame	König	As
Augenwert	7	8	9	10	2	3	4	11

Seine Freunde sollen, während er nicht im Zimmer ist, nach folgender Vorschrift Kartenstapel bilden: Für jeden Stapel wird zunächst eine Karte offen hingelegt, und der damit beginnende Stapel erhält so viele Punkte, wie der Augenwert dieser Karte angibt. Dann werden weitere Karten verdeckt auf den Stapel gelegt; für jede dieser Karten wird die Punktzahl des Stapels um 1 erhöht. Dies wird aber nur so lange durchgeführt, bis die Punktzahl 11 erreicht ist; der Stapel ist damit abgeschlossen. Er wird dann umgedreht, so daß die bisher unterste Karte nun verdeckt oben liegt.

(1.Beispiel: 7 offen hinlegen, vier Karten verdeckt darauf legen, Stapel umdrehen.
2.Beispiel: As offen hinlegen, umdrehen.)

Solche Stapel werden einige Male gebildet und nebeneinander auf den Tisch gelegt. Falls am Ende Karten übrigbleiben, werden diese „Restkarten" einzeln abzählbar und verdeckt neben die Stapel gelegt.

Dann wird Axel hereingerufen. Er behauptet, er könne aus der Anzahl der fertigen Stapel und der Anzahl der Restkarten die Summe der Augenwerte der nunmehr obersten Karten der Stapel finden. Wie ist das möglich?

340945

Einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ wird die Inkugel K einbeschrieben (das ist diejenige Kugel, die alle vier Dreiecksflächen ABC , ABD , ACD , BCD berührt). Dieser Kugel wird ein zweites regelmäßiges Tetraeder $PQRS$ einbeschrieben (d.h., seine Ecken P , Q , R , S liegen alle auf der Oberfläche der Kugel K).

Welches Verhältnis $V_2 : V_1$ bildet das Volumen V_2 eines solchen Tetraeders $PQRS$ mit dem Volumen V_1 von $ABCD$?

340946

Wie viele Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen x , y , die die Ungleichung $|x-30|+|y-10| < 100$ erfüllen, gibt es insgesamt?

34. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Deutschland-Olympiade)
Lösungen
Klasse 9
1. Tag

340941 Lösung: 6 Punkte

Werden die Völkerstämme mit a , b , c , d und die Geschlechter mit 1 , 2 , 3 , 4 bezeichnet, so ist zum Beispiel eine mögliche Sitzordnung:

$a1$	$b2$	$c3$	$d4$
$b4$	$a3$	$d2$	$c1$
$c2$	$d1$	$a4$	$b3$
$d3$	$c4$	$b1$	$a2$

In der Tat wurden entsandt: $a1$, $a2$, $a3$, $a4$ aus a, $b1$, $b2$, $b3$, $b4$ aus b, $c1$, $c2$, $c3$, $c4$ aus c, $d1$, $d2$, $d3$, $d4$ aus d, und in jeder Zeile und jeder Spalte kommen sowohl a, b, c, d als auch 1, 2, 3, 4 vor.

340942 Lösung: 7 Punkte

Es gilt $$z=7+7^3+7^5+\cdots+7^{95}=7\cdot\left(1+7^2+7^4+\cdots+7^{94}\right)\ . \qquad (1)$$

Ferner gilt $$1+7^2+7^4+\cdots+7^{94}=1+(48+1)+(48+1)^2+\cdots+(48+1)^{47}\ . \qquad (2)$$

Jeder der Summanden $(48+1)$, $(48+1)^2$, ... , $(48+1)^{47}$ läßt bei Division durch 48 den Rest 1 ; d.h., es gibt ganze Zahlen g_1 , g_2 , ... , g_{47} , mit denen $48+1=g_1\cdot 48+1$, $(48+1)^2=g_2\cdot 48+1$, ... , $(48+1)^{47}=g_{47}\cdot 48+1$ gilt. Da dies zusammen mit dem Summanden 1 genau 48 Summanden sind, beträgt die in (2) genannte Summe

$$\begin{aligned}1+\left(g_1\cdot 48+1\right)+\left(g_2\cdot 48+1\right)+\cdots+\left(g_{47}\cdot 48+1\right)\\ =\left(g_1+g_2+\cdots+g_{47}\right)\cdot 48+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{48\text{ Summanden}}\\ =\left(g_1+g_2+\cdots+g_{47}+1\right)\cdot 48\ .\end{aligned}$$

Zusammen mit (1) folgt damit $$z=7\cdot 48\cdot\left(g_1+g_2+\cdots+g_{47}+1\right)\ ,$$
also ist z durch $7\cdot 48=336$ teilbar, w.z.b.w.

2.Lösungsweg: Es gilt $z=7\cdot\dfrac{49^{48}-1}{49-1}$. Weiter folgt der Reihe nach:

$$49^2=48^2+2\cdot 48+1\equiv 2\cdot 48+1 \mod 48^2\ ,\quad 49^4\equiv(2\cdot 48+1)^2\equiv 4\cdot 48+1 \mod 48^2\ ,$$
$$49^6\equiv(4\cdot 48+1)\cdot(2\cdot 48+1)\equiv 6\cdot 48+1 \mod 48^2 \quad ,...,\quad 49^{48}\equiv 48\cdot 48+1 \mod 48^2\ .$$

Also ist 49^{48} -1 durch 48^2 teilbar und daher z durch $7\cdot 48$ teilbar.

340943 Lösung:

7 Punkte

Die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ sei a. Für jeden Punkt $X \neq A$ auf AB seien folgende Bezeichnungen gewählt (siehe Abb. L340943): Der Schnittpunkt von AC mit XD sei S, die Fußpunkte der Lote von S auf AB bzw. AD seien H bzw. K, die Flächeninhalte der Flächenstücke AXS, ADS, CDS, $XBCS$ seien in dieser Reihenfolge F_1, F_2, F_3, F_4.

Wegen $AX \perp AD$ gilt
$$F_1 + F_2 = \frac{ax}{2}. \qquad (1)$$

Da die Diagonale AC den Winkel $\angle HAK$ halbiert, folgt aus Kongruenzsatz **sww**, daß $\Delta AHS \cong \Delta AKS$, also $\overline{HS} = \overline{KS}$ gilt. Daraus folgt $F_1 : F_2 = x : a$, also
$$F_2 = \frac{a}{x} \cdot F_1 . \qquad (2)$$

Setzt man dies in (1) ein, so folgt $F_1 \cdot \left(1 + \frac{a}{x}\right) = \frac{ax}{2}$,

also
$$F_1 = \frac{ax^2}{2(x+a)} ; \qquad (3)$$

hieraus und aus (2) folgt
$$F_2 = \frac{a^2 x}{2(x+a)} . \qquad (4)$$

Ferner ergibt sich
$$F_3 = \frac{a^2}{2} - F_2 = \frac{a^2 \cdot (x+a) - a^2 x}{2(x+a)} = \frac{a^3}{2(x+a)} , \qquad (5)$$
$$F_4 = \frac{a^2}{2} - F_1 = \frac{a^2 \cdot (x+a) - ax^2}{2(x+a)} = \frac{a^3 + a^2 x - ax^2}{2(x+a)} . \qquad (6)$$

Aus (3), (4), (5), (6) folgt
$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = x^2 : ax : a^2 : \left(a^2 + ax - x^2\right) , \qquad (7)$$
wegen $0 < x \leq a$ also $0 < F_1 \leq F_2 \leq F_3 \leq F_4$.

I. Wegen dieser Ungleichungen können F_1, F_2, F_3, F_4 nur in einer solchen Reihenfolge im Verhältnis $1 : p : q : r$ mit natürlichen Zahlen p, q, r stehen, bei der für eine dieser Zahlen, etwa für p, insbesondere $F_1 : F_2 = 1 : p$ gilt.

Nach (7) besagt dies $x : a = 1 : p$, also
$$x = \frac{a}{p} . \qquad (8)$$

II. Gilt (8) mit einer natürlichen Zahl p, so ist nach (7)
$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = \frac{a^2}{p^2} : \frac{a^2}{p} : a^2 : \left(a^2 + \frac{a^2}{p} - \frac{a^2}{p^2}\right) = 1 : p : p^2 : \left(p^2 + p - 1\right) ,$$
also wird die Bedingung erfüllt, daß F_1, F_2, F_3, F_4 in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis $1 : p : q : r$ mit natürlichen Zahlen p, q, r stehen.

Aus I. und II. folgt: Diese Bedingung wird genau dann erfüllt, wenn X (auf AB mit $X \neq A$) so gewählt wird, daß $\overline{AX} = \frac{a}{p}$ mit einer natürlichen Zahl p gilt.

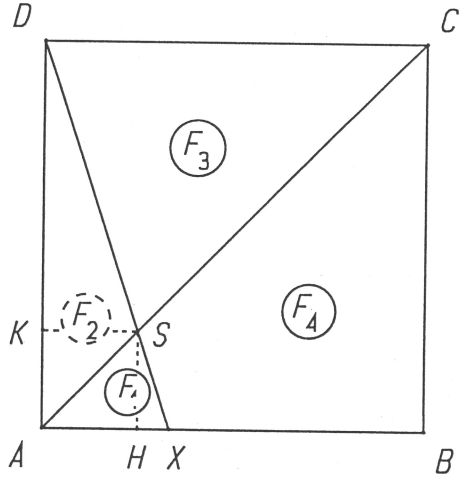

Abb L340943

Vorschläge zur Punktverteilung

340941

Korrektes Beispiel	3
Bestätigung, daß die Bedingungen erfüllt sind	3
	6

340942

Vorbereitende Rechnung, z.B. (2)	2
Aussage oder Formelangabe zur Teilbarkeit durch 48	3
Abschließender Nachweis der Teilbarkeit durch 336	2
	7

340943

Nutzbare Formeln für F_1, F_2, F_3, F_4, z.B. (3)-(6)	4
Schluß auf $F_1 : F_2 = 1 : p$	2
Abschließende Herleitung, daß genau $\overline{AX} = \dfrac{a}{p}$ die Bedingung der Aufgabe erfüllt	1
	7

34. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Deutschland-Olympiade)
Lösungen
Klasse 9
2. Tag

340944 Lösung: 6 Punkte

Es sei s die Anzahl der Stapel, r die Anzahl der Restkarten. Die Augenwerte der obersten Karten der Stapel seien $w_1, \dots, w_s$. Dann liegt folgende Verteilung vor:

Stapel Nr.1:		Stapel Nr.s:	Restkarten:
1 Karte mit w_1 Augen	…	1 Karte mit w_s Augen	r Karten
$11-w_1$ Karten		$11-w_s$ Karten	

Da es insgesamt 32 Karten gibt, gilt somit

$$\left(1+11-w_1\right)+\cdots+\left(1+11-w_s\right)+r=32\ ,$$

also

$$\underbrace{12+\cdots+12}_{s\ \text{Summanden}}-\left(w_1+\cdots+w_s\right)+r=32\ ,$$

$$w_1+\cdots+w_s=s\cdot 12+r-32\ .$$

Nach dieser Formel kann man die gesuchte Summe $w_1+\cdots+w_s$ aus s und r berechnen.

340945 Lösung: 7 Punkte

Über das regelmäßige Tetraeder $ABCD$ und seine Inkugel K gilt[1)] (siehe Abb. L340945): Die vier Tetraederhöhen AP, BQ, CR, DS schneiden sich in einem Punkt M; dieser hat von den Flächen BCD, ACD, ABD, ABC gleiche Abstände $\overline{MP}=\overline{MQ}=\overline{MR}=\overline{MS}$, er ist also der Mittelpunkt der Inkugel K des Tetraeders $ABCD$. Die Strecken MA, MB, MC, MD bilden gleichgroße Winkel miteinander jeweils wie MP, MQ, MR, MS; ihre Längen sind das Dreifache des Radius von K, also sind P, Q, R, S die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders, das K als Umkugel besitzt, d.h. (wie in der Aufgabe verlangt) dieser Kugel einbeschrieben ist.

Ferner folgt, daß M auch der Mittelpunkt der Umkugel von $ABCD$ ist. Die Umkugelradien der beiden regelmäßigen Tetraeder $PQRS$ und $ABCD$ stehen somit im Verhältnis $1:3$. Da sie entsprechende Streckenlängen in den einander ähnlichen Körpern $PQRS$ und $ABCD$ sind, stehen deren Volumina im Verhältnis der dritten Potenzen:

$$V_2:V_1=1:27\ .$$

In <u>anderen Lösungsvarianten</u> kann man mehr Gebrauch vom Strahlensatz machen. Zum Beispiel kann man (nachdem M als Höhenschnittpunkt von $ABCD$ und P, Q, R, S als Höhenschnittpunkte von BCD, ACD, ABD, ABC geklärt sind) wegen $\overline{FS}:\overline{FA}=\overline{FP}:\overline{FD}$, also $PS \parallel DA$, das Kantenverhältnis $\overline{PS}:\overline{DA}=\overline{FS}:\overline{FA}=1:3$ der Tetraeder erhalten.

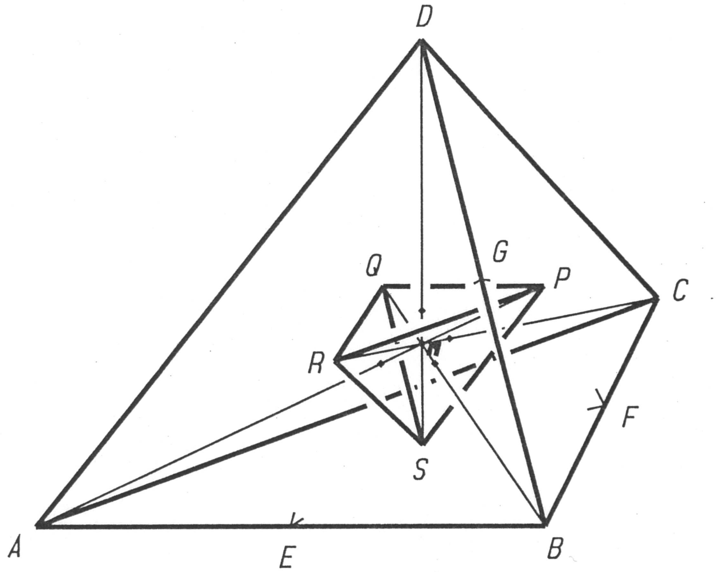

Abb. L340945

[1)] Die oben anschließenden Aussagen können als bekannter Sachverhalt zitiert werden. Möglich sind stattdessen z.B. folgende Beweisführungen: Ist E der Mittelpunkt von AB, so gilt $AB \perp CE$ und $AB \perp DE$, also ist AB senkrecht auf der Ebene ε durch C, D, E. Ebenso gilt: Ist F der Mittelpunkt von BC, so ist BC senkrecht auf der Ebene δ durch A, D, F. Daher ist die Ebene durch A, B, C senkrecht auf der Schnittgeraden von ε und δ. Diese enthält also die auf ABC senkrechte Höhe des Tetraeders; damit ist gezeigt: Diese Höhe hat als Fußpunkt S den Schnittpunkt von CE mit AF, d.h. den Höhenschnittpunkt von ABC. Entsprechendes gilt für die anderen Tetraederhöhen; so ist die auf BCD senkrechte Höhe AP enthalten in der Schnittgeraden von δ und der Ebene ζ durch A, C, G, wobei G der Mittelpunkt von BD ist. Somit gehen diese beiden (und ebenso die anderen) Tetraederhöhen durch einen gemeinsamen Punkt M, nämlich den Schnittpunkt der drei Ebenen ε, δ, ζ.

In dem mit $\overline{AF} = \overline{DF}$ gleichschenkligen Dreieck zeigt man für die Höhenabschnitte $\overline{MP} = \overline{MS}$ (und entsprechend $= \overline{MQ} = \overline{MR}$), z.B. vermittels $\overline{\angle ADF} = \overline{\angle DAF}$, $\Delta ADP \cong \Delta DAS$, $\overline{\angle DAP} = \overline{\angle ADS}$, $\overline{AM} = \overline{DM}$. Die Tetraeder $ABCM$, $ABDM$. $ACDM$, $BCDM$ sind somit einander volumengleich, das Volumen von $ABCD$ ist das Vierfache des Volumens von $ABCM$, hieraus folgt $\overline{DS} = 4 \cdot \overline{MS}$, $\overline{DM} = 3 \cdot \overline{MS}$.

340946 Lösung: 7 Punkte

Für jedes Paar $(x;y)$ ganzer Zahlen sind $u=|x-30|$, $v=|y-10|$ ganze Zahlen mit $u\geq 0$ und $v\geq 0$. Sie erfüllen genau dann die Ungleichung $u+v<100$, wenn $(u;v)$ eines der Paare ist, die aus der folgenden Tabelle ersichtlich sind:

u	v
0	0 , 1 , ... , 97 , 98 , 99
1	0 , 1 , ... , 97 , 98
....	....
98	0 , 1
99	0

Die Anzahl dieser Paare beträgt $100+99+\cdots+2+1=50\cdot 101$. (Dies kann einer als bekannt zu zitierenden Summenformel entnommen oder z.B. durch die Umformung zu $(100+1)+(99+2)+\cdots+(51+50)$ erhalten werden.)

Je eines dieser Paare $(u;v)$ führt auf alle diejenigen Paare $(x;y)$, für die eine der zwei Gleichungen $u=x-30$, $u=30-x$ und eine der zwei Gleichungen $v=y-10$, $v=10-y$ gilt. Die zwei Gleichungen $u=x-30$, $u=30-x$ führen genau dann auf dieselbe Zahl x, wenn $u=0$ gilt; ebenso führen die Gleichungen $v=y-10$, $v=10-y$ genau dann auf dieselbe Zahl y, wenn $v=0$ gilt.

Daher führt das Paar $(u;v)=(0;0)$ auf genau ein Paar $(x;y)$; jedes der 99 Paare $(u;v)=(0;1),\ldots,(0;99)$ und jedes der 99 Paare $(u;v)=(1;0),\ldots,(99;0)$ führt auf genau je zwei Paare $(x;y)$; und jedes der übrigen der Tabelle zu entnehmenden Paare $(u;v)$ führt auf genau je vier Paare $(x;y)$. Somit ist die gesuchte Anzahl

$$4\cdot 50\cdot 101-3-2\cdot(99+99)=20200-3-396=19801 .$$

Andere Lösungsmöglichkeiten: Man kann mit der Fallunterscheidung

(A): $x\geq 30, y\geq 10$; (B): $x\geq 30, y<10$; (C): $x<30, y\geq 10$; (D): $x<30, y<10$

beginnen und in jedem dieser Fälle jeweils die Ungleichung

(A): $x-30+y-10<100$; (B): $x-30-y+10<100$; (C): $-x+30+y-10<100$; (D): $-x+30-y+10<100$

diskutieren. So kann man zu (A) aus $x<140-y$ und $y\geq 10$ auf $x<130$ schließen und für jedes $x=30,\ldots,129$ die Werte y abzählen, für die $10\leq y<140-x$ gilt. Das läßt sich durch ähnliche Auszählungen wie oben durchführen, also etwa mit vierfachem Aufwand.

Man kann auch zu (A) die in einem x,y-Koordinatensystem durch $x\geq 30$, $y\geq 10$, $y<140-x$ gekennzeichneten Punkte betrachten, (Durchschnitt dreier Halbebenen, also) eine Dreiecksfläche. Entsprechend betrachtet man zu (B), (C), (D) je eine Dreiecksfläche. Die Vereinigungsmenge dieser vier Flächen ist eine Quadratfläche (siehe Abb. L340946), und dann hat man die Gitterpunkte (Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) in dieser Quadratfläche abzuzählen. Dabei kann man auch Symmetrie-Argumente nutzen und zu einem ähnlich einfachen Vorgehen wie im obigen Lösungstext kommen.

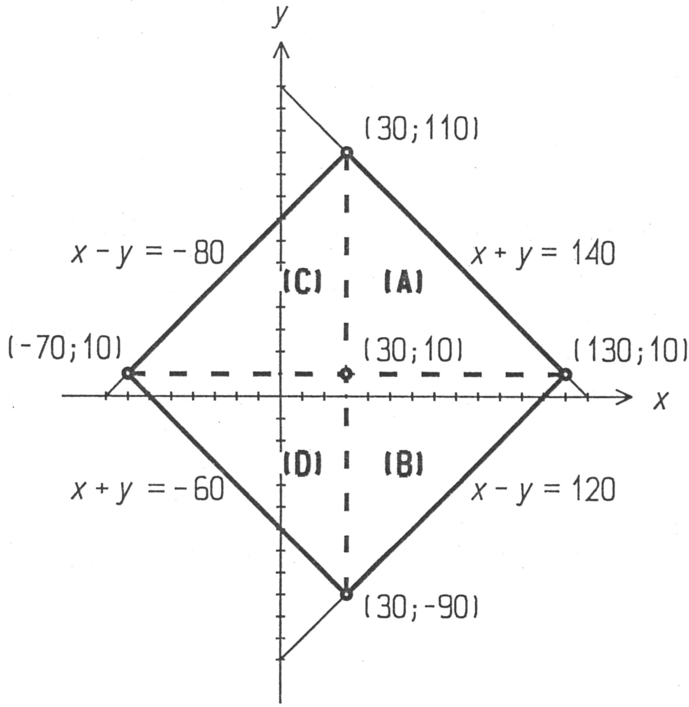

Abb. L340946

Vorschläge zur Punktverteilung

<u>340944</u>

Herleitung einer Beziehung zwischen s, r und $w_1 + \cdots + w_s$ 4
Übergang zu einer Ermittlungsmöglichkeit für $w_1 + \cdots + w_s$ 2
6

<u>340945</u>

Ausreichend (z.B. anschaulich) geklärte Lageverhältnisse von M, P, Q, R, S 2
Herleitung des Streckenverhältnisses 1 : 3 (oder gleichwertig nutzbare Aussage) 3
Schluß auf das Volumenverhältnis 2
7

<u>340946</u>

Ersichtlich zum Ziel führendes Abzählverfahren 3
Damit erreichte Ermittlung der gesuchten Anzahl 4
7