alpha 2-3/1995 S.23ff

Klasse 9 – 1. Tag

340931

Jürgen wählt auf einem Zeichenblatt drei Punkte A, B, C so, daß es keine Gerade gibt, auf der alle drei Punkte liegen, und daß die Strecke AB eine andere Länge hat als die Strecke BC. Dann versucht er, einen Punkt X zu konstruieren, der weder auf der durch A und B gelegten Geraden g noch auf der durch B und C gelegten Geraden h liegt und der außerdem die beiden folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:

(1) Der Punkt X hat von g den gleichen Abstand wie von h.

(2) Die Strecken AB und BC erscheinen von X aus unter gleichgroßen Winkeln; d.h., der Winkel $\angle AXB$ ist ebenso groß wie der Winkel $\angle BXC$.

Christa behauptet: Es gibt keinen solchen Punkt X; gleichgültig, welche Wahl von A, B, C (mit den eingangs genannten Lagebedingungen) Jürgen getroffen hat.

Hat Christa recht?

340932

Beweisen Sie, daß es keine natürliche Zahl n gibt, für die die Ziffernddarstellung der Zahl $9^n + 1$ auf mehr als eine Null enden würde!

340933

Berechnen Sie die Zahl

$$123456785 \cdot 123456787 \cdot 123456788 \cdot 123456796 - 123456782 \cdot 123456790 \cdot 123456791 \cdot 123456793,$$

ohne die Zahlenwerte der beiden Produkte einzeln zu berechnen!

Klasse 9 – 2. Tag

340934

Ein Quadrat $ABCD$ sei in 25 kongruente Teilquadrate aufgeteilt. Ist n eine positive ganze Zahl mit $n \leq 25$, so seien n verschiedene Farben gewählt, und von jeder dieser Farben seien 25 Blättchen von der Größe der Teilquadrate zur Verfügung gestellt. Von diesen $n \cdot 25$ Blättchen sollen dann 25 ausgewählt und so auf das Quadrat $ABCD$ gelegt werden, daß jedes Teilquadrat von genau einem der ausgewählten Blättchen bedeckt wird.

Eine Zahl n werde genau dann eine „freundliche" Zahl genannt, wenn für sie Folgendes gilt:

Bei *jeder* Auswahl von 25 der $n \cdot 25$ Blättchen, bei der jede der n Farben mit mindestens einem Blättchen vertreten ist, kann man die Verteilung auf die Teilquadrate so vornehmen, daß das bedeckte Quadrat $ABCD$ als farbiges Muster symmetrisch bezüglich der Geraden durch A und C ist.

Ermitteln Sie unter den positiven ganzen Zahlen $n \leq 25$ alle „freundlichen" Zahlen!

340935

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, für die jede der sechs Zahlen

$$n,\ n+2,\ n+6,\ n+8,\ n+12,\ n+14$$

eine Primzahl ist.

340936

Es sei $ABCD$ ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder, bei dem die vier Tetraederflächen ABC, ABD, ACD und BCD alle einander kongruent sind. Ferner sei h die Länge der auf einer der vier Tetraederflächen senkrechten Höhe, und P sei ein Punkt im Innern des Tetraeders $ABCD$. Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die folgende Aussage gilt:

Die Summe der Abstände von P zu den vier Tetraederflächen beträgt h.

Hinweis: Der *Abstand* eines Punktes zu einer begrenzten ebenen Fläche werde definiert als die Länge des Lotes von diesem Punkt auf die Ebene, in der die Fläche liegt. Das gelte auch dann, wenn der Fußpunkt dieses Lotes (zwar in der Ebene, aber) außerhalb der Begrenzung der ebenen Fläche liegt.

In diesem Sinne wird auch die auf einer Tetraederfläche senkrechte *Höhe* stets als das Lot von der Gegenecke auf die Ebene verstanden, in der die Tetraederfläche liegt.

34. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe (Länder-Olympiade)
Lösungen
Klasse 9
1. Tag

340931 Lösung: 7 Punkte

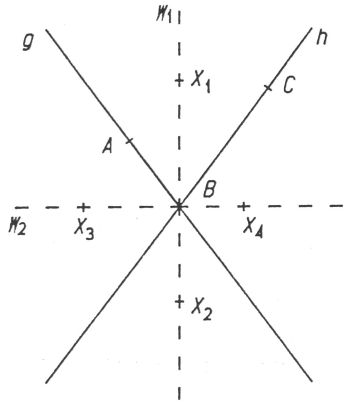

Abb. L340931

Christa hat recht. Beweis:

Die Bedingung (1) wird genau von denjenigen Punkten X erfüllt, die auf einer der beiden Winkelhalbierenden w_1, w_2 der Geraden g, h liegen (für die wegen der vorausgesetzten Lagebedingungen $g \neq h$ gilt; siehe Abb. L340931). Eine der beiden Winkelhalbierenden, etwa w_1, hat die Eigenschaft, daß A und C auf verschiedenen Seiten von w_1 liegen. Die Bedingung, daß X weder auf g noch auf h liegt, ist für alle X auf w_1 oder w_2 genau dann erfüllt, wenn $X \neq B$ ist.

Für alle $X \neq B$ auf w_1 (siehe $X = X_1$ oder $X = X_2$ in Abb L340931) gilt $\overline{\angle ABX} = \overline{\angle CBX}$, und wäre nun auch (2) erfüllt, also $\overline{\angle AXB} = \overline{\angle CXB}$, so folgte nach dem Kongruenzsatz sww, daß $\Delta\, ABX \cong \Delta\, CBX$, also $\overline{AB} = \overline{CB}$ sein müßte, im Widerspruch zur Wahl von A, B, C.

Für alle $X \neq B$ auf w_2 (siehe $X = X_3$ oder $X = X_4$ in Abb. L340931) ist (2) ebenfalls nicht erfüllt, da einer der beiden Winkel $\angle AXB$, $\angle CXB$ ein echter Teilwinkel des anderen, also kleiner als dieser ist.

340932 Lösung: 6 Punkte

1.Lösungsweg: Für jede natürliche Zahl n ist $9^n = \left(3^n\right)^2$ das Quadrat einer ungeraden Zahl; d.h., es gibt jeweils zu n eine natürliche Zahl k mit $3^n = 2k+1$, also $9^n + 1 = (2k+1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$. Daher ist $9^n + 1$ nicht durch 4 und folglich auch nicht durch 100 teilbar; die Zifferndarstellung von $9^n + 1$ endet also nicht auf mehr als eine Null.

2.Lösungsweg: Die letzten zwei Ziffern von 9^n $(n = 0,1,2,\ldots)$ sind

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
letzte 2 Ziffern von 9^n	01	09	81	29	61	49	41	69	21	89	01

Von da an wiederholen sich diese Ziffernpaare periodisch. Da keines von ihnen 99 lautet, endet keine der Zahlen $9^n + 1$ auf zwei Nullen.

Variante: Die Einerziffer ist stets abwechselnd 1 oder 9, die Zehnerziffer ist gerade. Beweis: Für $n = 0$ trifft es zu. Wenn es für ein n zutrifft, so auch für $n+1$; denn das Neunfache von 1 bzw. 9 ist 9 bzw. 81; und das Neunfache einer geraden Zehnerziffer, vermehrt um den Übertrag 0 bzw. 8, ist gerade.

340933 Lösung: 7 Punkte

Setzt man $123456789 = x$, so ist die zu berechnende Zahl gleich

$$\begin{aligned}(x-4)\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+7)-(x-7)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+4) &= \left(x^2-6x+8\right)\cdot\left(x^2+6x-7\right)-\left(x^2-6x-7\right)\cdot\left(x^2+6x+8\right)\\ &= x^4-35x^2+90x-56-\left(x^4-35x^2-90x-56\right)\\ &= 180x\\ &= 22222222020\,.\end{aligned}$$

Vorschläge zur Punktverteilung

340931

Verwendung der Bedingung gleichen Abstandes von X zu g und h,
z.B. Schluß auf die Lage von X auf einer der beiden Winkelhalbierenden 2

Verwendung der Bedingung $\angle AXB = \angle CXB$, z.B. zur indirekten Beweisführung:

Ersichtliche Beachtung der Lageunterscheidung $X \in w_1$ oder $X \in w_2$ 1

Beweisführung im Fall $X \in w_1$ 3

" " " $X \in w_2$ 1

7

340932

Vorbereitender Schritt, z.B. Übergang zur Darstellung $(2k+1)^2$
oder Folge der Paare von Einer- und Zehnerziffer 3

Abschließende Beweisführung 3

6

340933

Nutzbare Einführung einer Hilfsgröße, z.B. $x = 123456789$ (oder vergleichbares Vorgehen) 2

Weitere Rechenschritte (z.B.: Ausmultiplizieren, Zusammenfassen, abschließ.Multiplikation 2+2+1 Pkte.) 5

7

34. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe (Länder-Olympiade)
Lösungen
Klasse 9
2. Tag

340934 Lösung: 7 Punkte

I. Jede positive ganze Zahl $n \leq 6$ ist „freundlich“. Beweis:
Es seien 25 Blättchen so ausgewählt, daß jede der n Farben mit mindestens einem Blättchen vertreten ist. Die Anzahl k derjenigen Farben, die in dieser Auswahl mit je einer ungeraden Blättchenzahl vertreten sind, muß selbst ungerade sein (denn wäre k gerade, so wäre die Summe der Blättchenzahlen aller Farben eine gerade Zahl; sie ist aber die Zahl 25). Hiernach und wegen $k \leq n \leq 6$ ist k eine der Zahlen 1, 3, 5 . Daher kann man von jeder dieser k Farben je genau ein Blättchen auf eines derTeilquadrate legen, die von AC durchquert werden; und danach sind entweder (im Fall $k=5$) alle diese Teilquadrate belegt, oder (für $k=1$, $k=3$) es bleibt eine gerade Anzahl dieser 5 Teilquadrate frei. Also kann man diese Teilquadrate so mit noch verfügbaren Blättchen der Auswahl belegen, daß man jede dabei herangezogene Farbe in gerader Blättchenzahl verwendet. Weiter folgt, daß dann alle Farben unter den noch verfügbaren Blättchen in gerader Blättchenzahl übrigbleiben, da von jeder der k zu Beginn ungeradzahlig vetretenen Farben bereits eine ungerade Zahl von Blättchen gelegt wurde.
Damit aber ist erreicht, daß man jedes zu AC symmetrische Paar der nicht von AC durchquerten Teilquadrate mit einander gleichfarbigen Blättchen belegen kann. Dadurch entsteht insgesamt ein zu AC symmetrisches farbiges Muster, w.z.b.w.

II. Keine der ganzen Zahlen n mit $7 \leq n \leq 25$ ist „freundlich“ Beweis:
Für jede ganze Zahl n mit $7 \leq n \leq 25$ ist beispielsweise folgende Auswahl möglich: Man wählt von einer Farbe $26-n$ Blättchen. Wegen $n \leq 25$, also $26-n \geq 1$ ist damit diese Farbe mit mindestens einem Blättchen vertreten. Von den anderen $n-1$ Farben wählt man je genau ein Blättchen aus. Wegen $(26-n)+(n-1)=25$ hat man damit insgesamt eine Auswahl von genau 25 Blättchen getroffen.
Für diese Auswahl ist es aber, wie behauptet, nicht möglich, die Blättchen so zu verteilen, daß ein bezüglich AC symmetrisches Muster entsteht; denn in jedem solchen Muster können höchstens die Farben auf den fünf von AC durchquerten Teilquadraten in ungerader Blättchenzahl vorkommen, während die hier getroffene Auswahl mindestens die letzten $n-1 \geq 6$ Farben in der ungeraden Blättchenzahl 1 enthält.

Mit I. und II. ist gezeigt: Die „freundlichen“ unter den positiven ganzen Zahlen $n \leq 25$ sind genau die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 .

340935 Lösung: 7 Punkte

Für $n=1$, 2 , 3 , 4 ist jeweils zum Beispiel $n=1$, $n+2=4$, $n+6=9$, $n=4$ keine Primzahl.
Für $n=5$ sind alle sechs Zahlen $n=5$, $n+2=7$, $n+6=11$, $n+8=13$, $n+12=17$, $n+14=19$ Primzahlen.
Für jede ganze Zahl $n \geq 6$ liegt einer der folgenden Fälle vor:

1. Mit einer ganzen Zahl $k \geq 1$ ist	$n = 5k + 1$. Dann ist	$n + 14 = 5 \cdot (k + 3)$	keine Primzahl.
2. “ “ “ “ “ “	$n = 5k + 2$. “ “	$n + 8 = 5 \cdot (k + 2)$	“ “ .
3. “ “ “ “ “ “	$n = 5k + 3$. “ “	$n + 2 = 5 \cdot (k + 1)$	“ “ .
4. “ “ “ “ “ “	$n = 5k + 4$. “ “	$n + 6 = 5 \cdot (k + 2)$	“ “ .
5. “ “ “ “ $k \geq 2$ “	$n = 5k$. “ “	n	“ “ .

Daher erfüllt unter allen positiven ganzen Zahlen n genau die Zahl $n = 5$ die Bedingung, daß jede der sechs Zahlen n , $n+2$, $n+6$, $n+8$, $n+12$, $n+14$ eine Primzahl ist.

340936 Lösung: 6 Punkte

Das Tetraeder *ABCD* läßt sich in die vier Teiltetraeder *ABCP*, *ABDP*, *ACDP*, *BCDP* zerlegen. Die vier Abstände d, c, b, a des Punktes P von den Tetraederflächen *ABC*, *ABD*, *ACD* bzw. *BCD* sind die auf diesen Flächen senkrechten Höhen in den Teiltetraedern. Nach Voraussetzung sind diese Tetraederflächen einander kongruent, also haben sie alle denselben Flächeninhalt F. Für für das Volumen V des Tetraeders *ABCD* sowie für die Volumina V_1 , V_2 , V_3 , V_4 der Teiltetraeder gilt damit

$$V = \frac{1}{3} \cdot F \cdot h , \qquad V_1 = \frac{1}{3} \cdot F \cdot d , \qquad V_2 = \frac{1}{3} \cdot F \cdot c , \qquad V_3 = \frac{1}{3} \cdot F \cdot b ,$$

$$V_4 = \frac{1}{3} \cdot F \cdot a .$$

Wegen $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V$ folgt nach Division durch $\frac{1}{3} \cdot F \ (\neq 0)$ die Behauptung $d + c + b + a = h$.

Vorschläge zur Punktverteilung

340934

Nachweis, daß alle $n \leq 6$ „freundlich" sind, z.B. in den Teilschritten	
Belegung der von AC durchquerten Felder	2
Fortsetzung zu symmetrischem Muster	2
Nachweis, daß alle $n \geq 7$ nicht „freundlich" sind, z.B. in den Teilschritten	
Angabe einer Auswahl von 25 Blättchen	1
Beweis, daß mit dieser Auswahl kein symmetrisches Muster erreichbar ist	2
	7

340935

Bestätigung der geforderten Eigenschaft für $n = 5$	2
Widerlegung " " " für alle anderen n, z.B.:	
Nachweis für einzelne Werte n	2
Nachweis in allgemeinen (z.B. durch Restklasseneigenschaften charakterisierten) Fällen	3
	7

340936

Verwendung eines nutzbaren Motivs, z.B.	
Betrachtung der Volumina des Tetraeders $ABCD$ und seiner Teiltetraeder	3
Abschließender Beweis der behaupteten Gleichung	3
	6