

34. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe (Kreisolympiade)

Aufgaben

Klasse 9

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

340921

Die Bewohner des Planeten Trion unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau drei verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau drei Völkerstämme. Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau drei Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.

Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 9 Sitze in quadratförmiger Formierung zu drei Zeilen und drei Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und in jeder Spalte müssen alle drei Völkerstämme und alle drei Geschlechter vertreten sein.

Geben Sie eine mögliche Sitzordnung an und bestätigen Sie, daß bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

340922

Jonas beschäftigt sich mit der Lösung des Kryptogramms

$$\begin{array}{r} EINS \\ + ACHT \\ \hline = NEUN \end{array} ;$$

d. h., er versucht, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine (im dekadischen Positionssystem) richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Ferner ist auch die Regel einzuhalten, daß in jeder Zeile als Anfangsziffer nicht die Ziffer Null auftritt.

Nach einer Stunde behauptet der ein wenig langsam arbeitende Jonas, er habe immerhin schon 25 verschiedene Lösungen gefunden. Der ein wenig skeptische Felix bezweifelt, daß es überhaupt so viele verschiedene Lösungen gibt. Hat Felix mit seinem Zweifel recht?

340923

Ausgehend von einem Quadrat $ABCD$ kann man für je zwei positive ganze Zahlen x und y die folgenden Konstruktionen ausführen:

Die Seite AB wird über B hinaus um die Länge $x \cdot \overline{AB}$ bis zum Punkt S verlängert,

" " BC " " C " " " " $y \cdot \overline{BC}$ " " " T " ,

" " CD " " D " " " " $x \cdot \overline{CD}$ " " " U " ,

" " DA " " A " " " " $y \cdot \overline{DA}$ " " " V " .

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ positiver ganzer Zahlen, für die das so zu erhaltende Viereck $STUV$ einen genau 11 mal so großen Flächeninhalt wie das Quadrat $ABCD$ hat!

340924

Über der Seite AB eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit gegebener Seitenlänge a werde nach außen das Quadrat $ABPQ$ errichtet. Anschließend stellt man sich dieses Quadrat beweglich vor. Es soll in mathematisch positivem Drehsinn um das Dreieck ABC herum „rollen, ohne zu gleiten“. (Zu Anfang bleibt also nur der Punkt B fest, die anderen Punkte bewegen sich, bis die Strecke BP in die Lage BC kommt; dann bleibt C fest usw.).

- (a) Auf diese Weise werde das Quadrat so lange gerollt, bis es zum ersten Mal wieder eine mit AB zusammenfallende Seite hat (dies muß nicht die Seite sein, die zu Anfang AB war). Wie lang ist dabei der Weg, den
- der Punkt A ,
 - der Mittelpunkt M des Quadrates $ABCD$,
 - der Mittelpunkt H der Seite AB des Quadrates
- zurücklegt?
- (b) Ausgehend vom Anfangszustand $ABPQ$ wurde nicht nur eine in (a) beschriebene „volle Umrundung des Dreiecks ABC “ durchgeführt, sondern in Fortsetzung hierzu wurde das Quadrat weitergerollt. Dies wurde erst dann beendet, als zum ersten Mal jeder der vier Punkte A, B, P, Q seine ursprüngliche Lage wieder erreicht hatte.
- Wie viele volle Umrundungen des Dreiecks ABC fanden vom Anfangszustand bis zum geschilderten Ende dabei insgesamt statt?
 - Wie viele volle Umdrehungen des Quadrats, bezogen auf seinen eigenen Mittelpunkt M , wurden dabei insgesamt ausgeführt?

34. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe (Kreisolympiade)

Lösungen Klasse 9

340921 Lösung:

8 Punkte

Werden die Völkerstämme mit a, b, c und die Geschlechter mit $1, 2, 3$ bezeichnet, so ist zum Beispiel eine mögliche Sitzordnung:

$$\begin{array}{ccc} a1 & b2 & c3 \\ b3 & c1 & a2 \\ c2 & a3 & b1 \end{array}$$

In der Tat wurden entsandt: $a1, a2, a3$ aus a ,

$b1, b2, b3$ aus b ,

$c1, c2, c3$ aus c ,

und in jeder Zeile und jeder Spalte kommen sowohl a, b, c als auch $1, 2, 3$ vor.

340922 Lösung:

10 Punkte

Felix hat nicht recht. Dies kann z. B. folgendermaßen gezeigt werden:

Es gibt die Lösungen

$$\begin{array}{l} \begin{array}{ccccc} 3492 & 8094 & 7091 & 3091 & 8392 & 4091 & 4193 \\ + 5817 & + 1735 & + 2648 & + 6258 & + 1467 & + 5378 & + 5286 \\ = 9309 & = 9829 & = 9739 & = 9349 & = 9859 & = 9469 & = 9479 \end{array} \end{array} \quad (1)$$

In jeder dieser Lösungen kann man die Ziffern für S und T miteinander vertauschen, ebenso (unabhängig hiervon) die Ziffern für I und C . Da sich je zwei der Lösungen (1) in der Ziffer für U voneinander unterscheiden, ergeben sich hiermit bereits $4 \cdot 7 = 28$ verschiedene Lösungen.

Bemerkungen: Es gibt insgesamt $4 \cdot 42$ Lösungen. Zum Auffinden von 7 Lösungen, unter denen keine zwei durch die genannten Tauschmöglichkeiten ineinander überführbar sind, empfiehlt es sich, eine Strategie zu wählen, die mit relativ wenig Probierschritten relativ viele Lösungen zu finden verspricht. So wurde oben $N=9$ gewählt, woraus die Beziehung $H=U+1$ folgt; man kann für $U=0, 1, 2, \dots$ jeweils noch verfügbare Ziffern S, T, I, C, E, A mit $S+T=9, I+C+1=10x+E$ (hierin $x=0$ oder $x=1$), $E+A+x=9$ suchen. Oben wurde nach Auffinden solcher Ziffern für ein U , jeweils mit kleinstem S und hierzu mit kleinstem I , dann sogleich für das nächste U weitergesucht:

N	9	9												9	9													
U	0	1												6	7													
H	1	2												7	8													
S	2	3	4	1			4	1	1	1			2	1	3													
T	7	6	5	8			5	8	8	8			7	8	6													
I	3	4	0	0	5	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	2	4	0	3	0	0	0	0	0	1	
C	4	8	4	7	8	6	7	4	5	6	7	6	7	5	6	2	2	3	4	7	3	4	2	3	1	4	2	
x	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
E	8	3	5	8	4	7	8	5	6	7	4	7	8	6	7	3	3	4	7	2	4	8	3	4	2	5	4	
A	-	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	2	6	-	-	-	-	-	-	1	-	5	-	-	5	

340923 Lösung:

10 Punkte

Ist a die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$, so gilt (siehe Abb. L 340923):

$$\overline{BS} = x \cdot a, \quad \overline{CT} = y \cdot a, \quad \overline{DU} = x \cdot a, \quad \overline{AV} = y \cdot a.$$

Hieraus und aus den rechten Winkeln bei A, B, C, D folgt: Die Dreiecke BST und DUV haben den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot x \cdot a \cdot (y+1) \cdot a$, die Dreiecke CTU und AVS haben den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot y \cdot a \cdot (x+1) \cdot a$. Also hat das Viereck $STUV$ den Flächeninhalt

$$a^2 + x \cdot (y+1) \cdot a^2 + y \cdot (x+1) \cdot a^2 = (1+x+y+2xy) \cdot a^2.$$

Dieser ist genau dann 11 mal so groß wie der Flächeninhalt von $ABCD$, wenn

$$1+x+y+2xy=11$$

gilt.

Für $x=1$ lautet diese Gleichung $2+3y=11$; diese hat genau die Lösung $y=3$.

" $x=2$ " " " " $3+5y=11$; " " keine ganze Zahl y als Lösung.

" $x=3$ " " " " $4+7y=11$; " " genau die Lösung $y=1$.

Für $x \geq 4$ hat diese Gleichung keine positive ganze Zahl y als Lösung; denn für jede solche Zahl y ist

$$1+x+y+2xy \geq 1+4+1+2 \cdot 4 \cdot 1 = 14 > 11.$$

Daher sind die Bedingungen der Aufgabe genau für die beiden Paare $(1; 3)$ und $(3; 1)$ erfüllt.

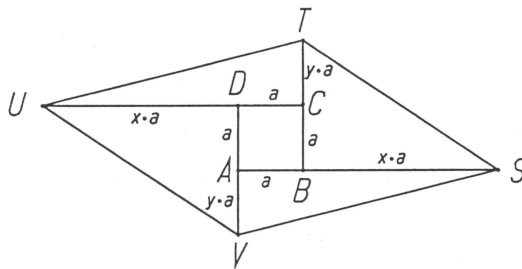


Abb. L 340923

340924 Lösung:

12 Punkte

(a) Die volle Umrundung des Dreiecks ABC findet in drei Teilbewegungen statt (siehe Abb. L 340924):

Die erste ist die Drehung um B durch den überstumpfen Winkel $\angle PBC$ der Größe $360^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 210^\circ$; dabei gehen P, Q, A, M, H in C, R, S, N, J über.

Die zweite Teilbewegung ist die Drehung um C durch 210° ; dabei gehen R, S, B, N, J in A, T, U, O, K über. Die dritte Teilbewegung ist die Drehung um A durch 210° ; dabei gehen T, U, C, O, K in B, P, Q, M, L über. Der Weg von A besteht demnach aus den drei Kreisbögen $k_{A1} = APS$, $k_{A2} = ST$, $k_{A3} = TQB$. Sie sind Bögen zu Zentriwinkeln der Größe 210° in Kreisen mit den Radien $a, a\sqrt{2}, a$. Also legt A einen Weg der Länge

$$\frac{\pi \cdot a \cdot 210^\circ}{180^\circ} \cdot (1 + \sqrt{2} + 1) = (2 + \sqrt{2}) \cdot \frac{7}{6} \pi \cdot a \approx 12,5137 \cdot a \text{ zurück.}$$

Der Weg von M besteht aus $k_{M1} = MN$, $k_{M2} = NO$, $k_{M3} = OM$, Bögen zu Zentriwinkeln von 210° in Kreisen des Radius $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$; also legt M einen Weg der Länge

$$\frac{\pi \cdot a \cdot 210^\circ}{180^\circ} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \right) = \frac{7}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot a \approx 7,7750 \cdot a \text{ zurück.}$$

Für den Weg von H , bestehend aus $k_{H1} = HLJ$, $k_{H2} = JK$, $k_{H3} = KL$, ergibt sich entsprechend die Länge

$$\frac{\pi \cdot a \cdot 210^\circ}{180^\circ} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \right) = (1 + 2 \cdot \sqrt{5}) \cdot \frac{7}{12} \cdot \pi \cdot a \approx 10,0282 \cdot a.$$

- (b) Bei der ersten Umrundung gehen die Punkte A, B, P, Q , wie in (a) beschrieben, in B, P, Q, A über; d. h., sie haben dieselbe Lage wie nach einer Vierteldrehung um M erreicht. Um zu bewirken, daß sie erstmals in ihre Anfangslage übergehen, muß eine solche Umrundung daher insgesamt 4 mal ausgeführt werden.

Die Strecke MQ geht bei der ersten in (a) genannten Teilbewegung in die Strecke NR über. Bezogen auf den Mittelpunkt des rollenden Quadrats (der bei dieser Teilbewegung selbst von M nach N gelangt) ist das eine Drehung von der Größe des überstumpfen Winkels $\angle QBR$, also von 210° . Entsprechendes gilt für die weiteren Teilbewegungen, also findet bezogen auf den Mittelpunkt des Quadrats bei der ersten Umrundung eine Drehung um $3 \cdot 210^\circ$ statt. Bei den soeben festgestellten 4 Umrundungen ist somit bezogen auf den Mittelpunkt des Quadrats eine Drehung um $12 \cdot 210^\circ = 2520^\circ = 7 \cdot 360^\circ$ zu verzeichnen, das sind 7 volle Umdrehungen.

Bemerkung: Eine detaillierte Beschreibung der einzelnen Bewegungs- und Wegteile in der obigen Ausführlichkeit ist vom Schüler nicht zu fordern. Sie soll hier vor allem dazu dienen, die Einzelheiten zu klären, z. B. um ein möglichst genaues Lokalisieren eventueller Fehler (und ein darauf beruhendes sachgerechtes Bewerten und Korrigieren) zu erleichtern.

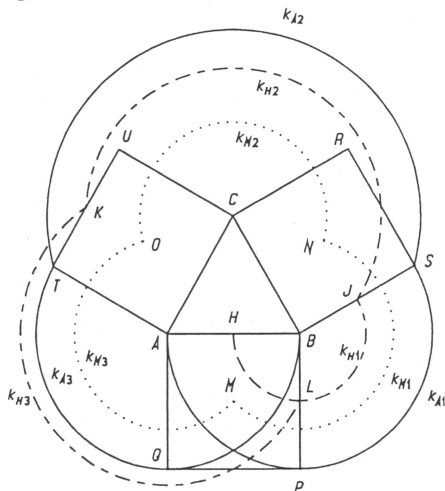


Abb. L 340924

Vorschläge zur Punktverteilung

340921

Korrektes Beispiel (etwa: Richtige Quadratstruktur; Verteilung der Völkerstämme; Verteilung der Geschlechter: 1+2+2 Punkte)	5
Bestätigung, daß die Bedingungen erfüllt sind (kann z. B. auch aus einem hinführenden Text ersichtlich sein)	<u>3</u>
	8

340922

Ausreichend viele Lösungsbeispiele (z. B. sieben angegebene Beispiele; Nachweis, daß aus jedem vier entstehen: 5+2 Punkte)	7
Nachweis der Verschiedenheit aller (explizit oder implizit) angegebenen Lösungen	<u>3</u>
	10

340923

Herleitung einer Gleichung wie $1 + x + y + 2xy = 11$ (z. B. Ermittlung der Flächeninhalte von <i>BST</i> , <i>DUV</i> , <i>CTU</i> , <i>AVS</i> ; abschließende Gewinnung der zur Aufgabenforderung äquivalenten Gleichung: 3+2 Punkte)	5
Ermittlung aller positiv ganzzahligen Lösungen der Gleichung (Bei Vorgehen wie im obigen Lösungsweg z. B. Lösungen für $x = 1, 2, 3$; Unlösbarkeit für $x \geq 4$: 3+2 Punkte. Bei anderem Vorgehen z. B. Auflösen nach einer Unbekannten; Nutzung von Teilbarkeitsfolgerungen: 2+3 Punkte)	<u>5</u>
	10

340924

(a) Ermittlung der drei Weglängen: 3+2+2 Punkte	7
(b) Ermittlung der Anzahl 4 der Umrundungen	2
Ermittlung der Anzahl 7 der Umdrehungen	<u>3</u>
	12