umlauft

34. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Deutschland-Olympiade)
Aufgaben
Klasse 8
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

340841

Die Bewohner des Planeten Quadron unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau vier verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau vier Völkerstämme. Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau vier Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.

Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 16 Sitze in quadratförmiger Formierung zu vier Zeilen und vier Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und in jeder Spalte müssen alle vier Völkerstämme und alle vier Geschlechter vertreten sein.

Gib eine mögliche Sitzordnung an und bestätige, daß bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

340842

Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen!

(1) Die Zahl n ist das Produkt von genau drei Primzahlen; je zwei dieser Primzahlen sind voneinander verschieden; jede dieser Primzahlen ist größer als 10.

(2) Die Zahl n kann als das Produkt von zwei natürlichen Zahlen dargestellt werden, deren Summe 600 beträgt. Die Zahl n kann aber auch als das Produkt von zwei natürlichen Zahlen dargestellt werden, deren Summe 240 beträgt.

340843

Auf einem Zeichenblatt seien drei Punkte A, B, C mit $A \neq B$, $A \neq C$ und $B \neq C$ gegeben. Gesucht sind zwei einander gleichgroße, voneinander verschiedene Kreise, von denen einer durch A, der andere durch C geht und die sich im Punkt B berühren.

Beschreibe Lagemöglichkeiten der gegebenen Punkte A, B, C, bei denen es

(a) keine solchen Kreise,
(b) mehr als ein Paar solcher Kreise,
(c) genau ein Paar solcher Kreise

gibt!

Zu (a) zeige, warum es keine solchen Kreise gibt; zu (b) bzw. (c) beschreibe und begründe je eine Konstruktion, mit der man aus den gegebenen Punkten mehrere derartige Kreispaare bzw. das eine derartige Kreispaar erhalten kann! Führe die von dir beschriebenen Konstruktionen durch! Wähle hierzu A, B, C jeweils in passender Lage für (b) bzw. (c) und konstruiere aus diesen A, B, C bei (b) zwei Kreispaare, bei (c) das eine Kreispaar!

unbrauchbar

34. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Deutschland-Olympiade)
Aufgaben
Klasse 8
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

340844

Axel führt einen Kartentrick vor. Er benutzt dazu ein Skatspiel, bestehend aus jeweils 4 Karten der folgenden Arten, denen er folgende Augenwerte zuteilt:

Art der Karte	7	8	9	10	Bube	Dame	König	As
Augenwert	7	8	9	10	2	3	4	11

Seine Freunde sollen, während er nicht im Zimmer ist, nach folgender Vorschrift Kartenstapel bilden: Für jeden Stapel wird zunächst eine Karte offen hingelegt, und der damit beginnende Stapel erhält so viele Punkte, wie der Augenwert dieser Karte angibt. Dann werden weitere Karten verdeckt auf den Stapel gelegt; für jede dieser Karten wird die Punktzahl des Stapels um 1 erhöht. Dies wird aber nur so lange durchgeführt, bis die Punktzahl 11 erreicht ist; der Stapel ist damit abgeschlossen. Er wird dann umgedreht, so daß die bisher unterste Karte nun verdeckt oben liegt.

(1.Beispiel: 7 offen hinlegen, vier Karten verdeckt darauf legen, Stapel umdrehen.
2.Beispiel: As offen hinlegen, umdrehen.)

Solche Stapel werden einige Male gebildet und nebeneinander auf den Tisch gelegt. Falls am Ende Karten übrigbleiben, werden diese „Restkarten“ einzeln abzählbar und verdeckt neben die Stapel gelegt.

Dann wird Axel hereingerufen. Er behauptet, er könne aus der Anzahl der fertigen Stapel und der Anzahl der Restkarten die Summe der Augenwerte der nunmehr obersten Karten der Stapel finden. Wie ist das möglich?

340845

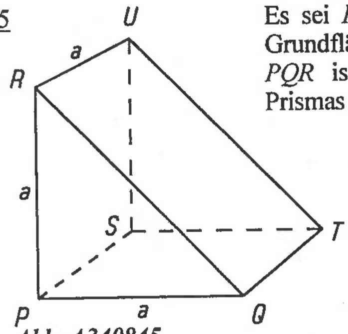

Abb. A340845

Es sei *PQRSTU* ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck *PQR* ist (siehe Abb. A340845). Die Höhenlänge des Prismas sei gleich der Kathetenlänge a des Dreiecks *PQR*.

Gesucht ist eine Ebene E, die parallel zu einer der quadratförmigen Seitenflächen F des Prismas verläuft und das Prisma in zwei Teilkörper zerlegt, deren Volumina sich in irgend einer Reihenfolge wie 9 : 16 verhalten. Ermittle zu gegebenem a alle diejenigen Werte, die der Abstand zwischen der Seitenfläche F und einer solchen Ebene E betragen kann!

340846

Wie viele Paare $(x\,;y)$ ganzer Zahlen x, y, die die Ungleichung $|x-30|+|y-10| < 100$ erfüllen, gibt es insgesamt?

34. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Deutschland-Olympiade)
Lösungen
Klasse 8
1. Tag

340841 Lösung: 6 Punkte

Werden die Völkerstämme mit a , b , c , d und die Geschlechter mit 1 , 2 , 3 , 4 bezeichnet, so ist zum Beispiel eine mögliche Sitzordnung:

$a1$	$b2$	$c3$	$d4$
$b4$	$a3$	$d2$	$c1$
$c2$	$d1$	$a4$	$b3$
$d3$	$c4$	$b1$	$a2$

In der Tat wurden entsandt: $a1$, $a2$, $a3$, $a4$ aus a, $b1$, $b2$, $b3$, $b4$ aus b, $c1$, $c2$, $c3$, $c4$ aus c, $d1$, $d2$, $d3$, $d4$ aus d, und in jeder Zeile und jeder Spalte kommen sowohl a, b, c, d als auch 1, 2, 3, 4 vor.

340842 Lösung: 7 Punkte

I. Wenn eine natürliche Zahl n den Bedingungen (1) und (2) genügt, so folgt:
Nach (1) gibt es Primzahlen p, q, r mit $p > 10$, $q > 10$, $r > 10$, $p \neq q$, $p \neq r$, $q \neq r$ und $n = p \cdot q \cdot r$. Alle Darstellungen von n als Produkt zweier natürlicher Zahlen sind daher
$$n = 1 \cdot pqr = p \cdot qr = q \cdot pr = r \cdot pq .$$
Nach (2) ist folglich eine der Zahlen $1 + pqr$, $p + qr$, $q + pr$, $r + pq$ gleich 600, eine andere gleich 240.

Sowohl 599 als auch 239 sind Primzahlen. Dies folgt wegen $25^2 > 599$ bzw. $16^2 > 239$ daraus, daß 599 durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 teilbar ist bzw. 239 durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13. Damit scheidet sowohl das Vorliegen von $1 + pqr = 600$ als auch das von $1 + pqr = 240$ aus. Also kann die Reihenfolge der Bezeichnungen p, q, r so gewählt werden, daß die Gleichungen

$$p + qr = 600 \ , \ q + pr = 240 \qquad (3)$$

gelten.

Daher gilt $pr < 240$, wegen der Voraussetzung $p \geq 11$ also $r < \frac{240}{11} < 22$ und wegen der Voraussetzung $r \geq 11$ ebenso $p < 22$. Folglich kommen für p und r nur die Primzahlen 11, 13, 17, 19 in Frage. Somit ist die Zahl $qr = 600 - p$ eine der Zahlen 589, 587, 583, 581. Von ihnen sind aber nur $589 = 19 \cdot 31$ und $583 = 11 \cdot 53$ das Produkt zweier Primzahlen größer als 10, während dies für die Primzahl 587 und für $581 = 7 \cdot 83$ nicht zutrifft. (Die hier genannten Primzahl-Aussagen können entsprechend wie oben für 599 und 239 gezeigt werden.) Damit verbleiben nur die Möglichkeiten, daß

entweder $r = 19$, $q = 31$, $p = 600 - 589 = 11$, $n = 11 \cdot 31 \cdot 19 = 6479$
oder $r = 11$, $q = 53$, $p = 600 - 583 = 17$, $n = 17 \cdot 53 \cdot 11 = 9911$
gilt.

II. Für jede dieser beiden Zahlen n zeigt die angegebene Zerlegung, daß (1) erfüllt ist. Ferner zeigt $n = 11 \cdot 589 = 31 \cdot 209$ und $11+589=600$, $31+209=240$
bzw. $n = 17 \cdot 583 = 53 \cdot 187$ und $17+583=600$, $53+187=240$,
daß auch (2) erfüllt ist.

Mit I. und II. ist gezeigt, daß genau die beiden Zahlen $n=6479$ und $n=9911$ den Bedingungen (1) und (2) genügen.

<u>Variante:</u> Aus (3) folgt $(q+p)\cdot(r+1)=840$, $(q-p)\cdot(r-1)=360$ durch Addition bzw. Subtraktion Von $r=11,13,17,19$ scheidet $r=17$ aus, da 840 nicht durch 18 teilbar ist. Ferner führt $r=13$ auf $q+p=840:14=60$, $q-p=360:12=30$, also die Nichtprimzahl $q=45$ und scheidet damit ebenfalls aus. Somit ist entweder $r=11$, $q+p=70$, $q-p=36$ oder $r=19$, $q+p=42$, $q-p=20$, woraus die oben genannten Werte folgen.

<u>340843 Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

(a) Bei den folgenden Lagemöglichkeiten für A, B, C (mit $A \neq B$, $A \neq C$, $B \neq C$) gibt es *keine* Kreise der genannten Art:

(a1) Der Punkt B liegt auf einer Verlängerung der Strecke AC.
(a2) Der Punkt B liegt auf der Strecke AC, ist aber nicht ihr Mittelpunkt.

Berühren sich nämlich zwei einander gleichgroße, voneinander verschiedene Kreise, so muß dies eine Berührung von außen sein. Für jede Gerade durch den Berührungspunkt B, die die Kreise in je einem von B verschiedenen Punkt A bzw. C schneidet (siehe Abb. L340843 a), gilt aber: B liegt zwischen A und C; also kann nicht (a1) vorliegen. Ferner gilt für jede solche Gerade: Sind M bzw. N die Mittelpunkte der beiden Kreise, so liegt B auf der Strecke MN, daher gilt $\overline{\angle ABM} = \overline{\angle CBN}$ (Scheitelwinkel), wegen $\overline{\angle ABM} = \overline{\angle BAM}$, $\overline{\angle CBN} = \overline{\angle BCN}$ (Basiswinkel) und $\overline{MB} = \overline{NB}$ nach Kongruenzsatz sww also $\Delta ABM \cong \Delta CBN$, $\overline{AB} = \overline{CB}$, somit kann auch (a2) nicht vorliegen.

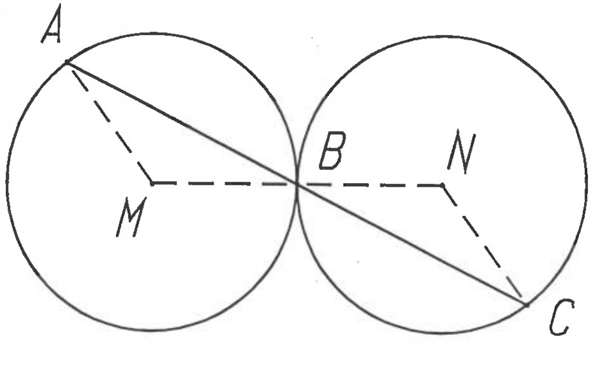

Abb. L340843 a

(b) *Mehr als ein* Paar von Kreisen der genannten Art gibt es, wenn B der Mittelpunkt der Strecke AC ist.

Man erhält solche Kreise durch folgende Konstruktion: Auf der Mittelsenkrechten von AB wählt man einen beliebigen Punkt M und bringt die Gerade durch M und B zum Schnitt N mit der Mittelsenkrechten von BC. Die Kreise um M und um N durch B gehen dann nämlich wegen $\overline{MA} = \overline{MB}$ und $\overline{NC} = \overline{NB}$ auch durch A bzw. C; sie berühren sich in B, da B auf MN liegt. Schließlich sind diese Kreise auch einander gleichgroß; denn wegen der Voraussetzung $\overline{AB} = \overline{CB}$ und wegen $\overline{\angle BAM} = \overline{\angle ABM} = \overline{\angle CBN} = \overline{\angle BCN}$ gilt $\Delta\ ABM \cong \Delta\ CBN$, also $\overline{MB} = \overline{NB}$.

Abb. L340843 b zeigt zwei Kreispaare, die nach dieser Beschreibung bei den Wahlen $M = M_1$ und $M = M_2$ erhalten werden.

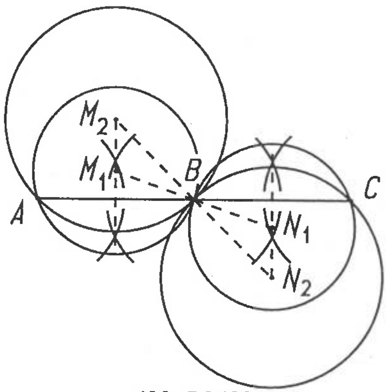

Abb. L340843 b

(c) *Genau ein* Kreispaar der genannten Art gibt es, wenn A, B und C nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
Man erhält es durch folgende Konstruktion (siehe Abb. L340843 c): Man verlängert die Strecken AB und CB jeweils über B hinaus um ihre eigene Länge bis A' bzw. C' und konstruiert die Umkreise der Dreiecke ABC' und $A'BC$ (die Umkreismittelpunkte M bzw. N sind in bekannter Weise als Schnittpunkte von Mittelsenkrechten zu erhalten). Diese Kreise haben die geforderten Eigenschaften; denn nach Konstruktion wird $\Delta\ ABC' \cong \Delta\ A'BC$, also sind die Umkreise einander gleichgroß. Daher ist auch $\Delta\ ABM \cong \Delta\ A'BN$ (Kongruenzsatz sss), also sind die Winkel $\angle ABM$, $\angle A'BN$ einander gleichgroß und folglich Scheitelwinkel; d.h., B liegt auf MN, die Kreise berühren sich in B.
Daß dieses Kreispaar das einzige mit den geforderten Eigenschaften ist, kann so gezeigt werden: Wenn vorausgesetzt wird, daß zwei Kreise diese Eigenschaften haben, so folgt wie in (a), aber mit A, B, A' und nochmals mit C, B, C' statt der dortigen A, B, C, daß die Kreise auch durch die hier konstruierten Punkte A' bzw. C' gehen.

<u>Bemerkungen zur Korrektur:</u> **1.** Da im Aufgabentext nicht gefordert war, *alle* Lagemöglichkeiten für keine, mehr als eine bzw. genau eine Lösung anzugeben, genügt zu (a) die Angabe (und der Unlösbarkeitsbeweis) zu weniger als (a1),(a2).

2. Zu (b) wird nicht verlangt, nachzuweisen, daß *jede* Lösung durch die beschriebene Konstruktion (mit geeigneter Wahl von M) erhalten werden kann.
3. Statt der *Gliederung* (a),(b),(c) kann eine andere gewählt werden, z.B.: **I.** *Aus der Annahme, ein gefordertes Kreispaar liege vor, schließt man* wie in (c), letzter Absatz, *auf die Konstruktion* in (c). Sie wird in den Fällen (a1),(a2) undurchführbar (sie führt auf drei paarweise verschiedene *kollineare* Punkte A, B, C' ; zu solchen existiert kein Umkreis), und sie führt – in einer geeigneten Variante – auch für $A' = C$, also im Fall (b), zu den dort genannten unendlich vielen Lösungen. **II.** *Aus der Konstruktionsbeschreibung schließt man* wie in (c), zweiter Absatz, *auf die Lösungseigenschaft* der konstruierten Kreise.
4. An mehreren Stellen kann eine weniger explizit verbal und *mehr anschaulich vorgehende Darstellungsweise* akzeptiert werden, z.B. bei dem in (c) erfolgten Rückverweis auf (a). Ferner kann die Argumentation auf *Abbildungs*eigenschaften zurückgreifen, z.B. auf Eigenschaften der Punktspiegelung an B.

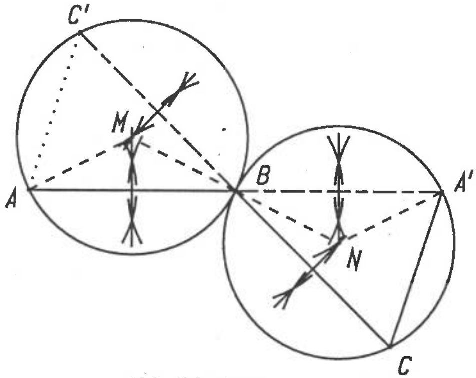

Abb. L340843 c

Vorschläge zur Punktverteilung

<u>340841</u>

Korrektes Beispiel	3
Bestätigung, daß die Bedingungen erfüllt sind	3
	6

<u>340842</u>

Zurückführung auf Forderungen an Primzahlen, z.B. $p+qr=600$, $q+pr=240$	2
Ermittlung der zwei Möglichkeiten solcher Primzahlen und damit von n	3
Bestätigung von (1),(2) (kann in vorhergehenden Lösungsteilen mit erbracht sein)	2
	7

<u>340843</u>

Angabe einer Lagemöglichkeit und Unlösbarkeitsnachweis zu (a)	1
Nachweis (Konstruktionsbeschreibung) für mehr als eine Lösung bei der Lagemöglichkeit, daß B der Mittelpunkt von AC ist	2
Desgl.: Nachweis für die Lösung bei der Lagemöglichkeit nichtkollinearer A, B, C	2
Ausführung der Konstruktionen zu (b) und (c)	3
	8

34. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Deutschland-Olympiade)
Lösungen
Klasse 8
2. Tag

340844 Lösung:

6 Punkte

Es sei s die Anzahl der Stapel, r die Anzahl der Restkarten. Die Augenwerte der obersten Karten der Stapel seien $w_1, \ldots, w_s$. Dann liegt folgende Verteilung vor:

Stapel Nr.1:		Stapel Nr.s:	Restkarten:
1 Karte mit w_1 Augen $11-w_1$ Karten	...	1 Karte mit w_s Augen $11-w_s$ Karten	r Karten

Da es insgesamt 32 Karten gibt, gilt somit

$$(1+11-w_1)+\cdots+(1+11-w_s)+r=32\ ,$$

also

$$\underbrace{12+\cdots+12}_{s\text{ Summanden}}-(w_1+\cdots+w_s)+r=32\ ,$$

$$w_1+\cdots+w_s=s\cdot 12+r-32\ .$$

Nach dieser Formel kann man die gesuchte Summe $w_1+\cdots+w_s$ aus s und r berechnen.

340845 Lösung:

6 Punkte

Für jede Ebene E, die (o.B.d.A.) parallel zur Seitenfläche $F=PSUR$ verläuft und das Prisma in zwei Teilkörper $PXYRSWZU$ und $XQYWTZ$ zerlegt (siehe Abb. L340845 a), gilt: Die Teilkörper sind Prismen, beide mit der Höhenlänge a; ihre Volumina verhalten sich also wie die Flächeninhalte ihrer Grundflächen $PXYR$ und XQY.

Wegen $\overline{\angle XQY}=\overline{\angle PQR}=45^\circ$ und $XY \parallel PR$, also $\overline{\angle QXY}=\overline{\angle QPR}=90^\circ$ (Stufenwinkel) ist auch XQY ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Mit $\overline{XQ}=x$ ist folglich auch $\overline{XY}=x$, und XQY hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}x^2$; somit hat $PXYR$ den Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}x^2$.

Daher hat die Ebene E genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn

entweder $(a^2-x^2):x^2=9:16$ oder $x^2:(a^2-x^2)=9:16$

gilt. Dies ist jeweils der Reihe nach äquivalent mit

$$16(a^2-x^2)=9x^2 \qquad \text{bzw.} \qquad 16x^2=9(a^2-x^2)\ ,$$

$$16a^2=25x^2 \qquad \text{bzw.} \qquad 25x^2=9a^2$$

und dies wegen $a>0$, $x>0$ mit

$$x=\frac{4}{5}a \qquad \text{bzw.} \qquad x=\frac{3}{5}a\ .$$

Also haben für den gesuchten Abstand $\overline{PX}$ genau die beiden Werte

$$a-x=\frac{1}{5}a \qquad \text{und} \qquad a-x=\frac{2}{5}a$$

die geforderte Eigenschaft.

Bemerkungen zu Lösungsvarianten: **1.** Man kann die Dreiecke PQR, XQY zu Quadraten $PQKR$, $XQLY$ ergänzen, deren Flächeninhalte sich entweder wie $(9+16):16$ oder wie $(16+9):9$ verhalten müssen. Das ergibt dann entweder $\overline{PQ}:\overline{XQ}=5:4$ oder $\overline{PQ}:\overline{XQ}=5:3$ (siehe Abb. L340845 b,c).

2. Es kann als anschaulich hinreichend fundiert akzeptiert werden, daß es für jede der beiden Reihenfolge-Möglichkeiten der Verhältnisbildung *genau einen* gesuchten Wert $\overline{PX}$ gibt. Daher kann akzeptiert werden, wenn nicht die Einzigkeit der Werte $\frac{1}{5}a$ und $\frac{2}{5}a$ aus der Volumenverhältnis-Forderung hergeleitet wird, sondern umgekehrt *nur* bewiesen wird, daß *für jene beiden Werte* von $\overline{PQ}:\overline{XQ}$ diese *Forderung erfüllt* ist. Zusammen mit der Möglichkeit, die in der vorigen Bemerkung genannt wurde, kann dieser Nachweis durch Auszählen der Teilquadrate in Abb. L340845 b,c erfolgen.

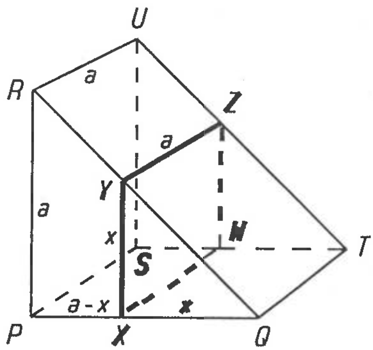

Abb. L340845 a

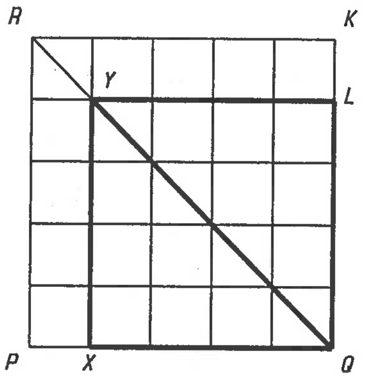

Abb. L340845 b

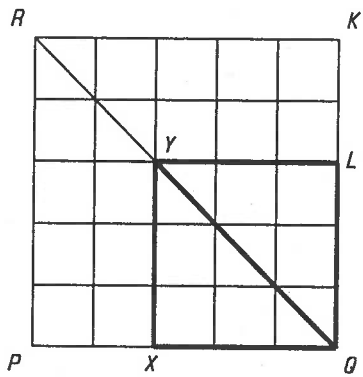

Abb L340845 c

340846 Lösung: 7 Punkte

Für jedes Paar $(x;y)$ ganzer Zahlen sind $u=|x-30|$, $v=|y-10|$ ganze Zahlen mit $u\geq 0$ und $v\geq 0$. Sie erfüllen genau dann die Ungleichung $u+v<100$, wenn $(u;v)$ eines der Paare ist, die aus der folgenden Tabelle ersichtlich sind:

u	v
0	0, 1, ..., 97, 98, 99
1	0, 1, ..., 97, 98
....	....
98	0, 1
99	0

Die Anzahl dieser Paare beträgt $100+99+\cdots+2+1=50\cdot 101$. (Dies kann einer als bekannt zu zitierenden Summenformel entnommen oder z.B. durch die Umformung zu $(100+1)+(99+2)+\cdots+(51+50)$ erhalten werden.)

Je eines dieser Paare $(u;v)$ führt auf alle diejenigen Paare $(x;y)$, für die eine der zwei Gleichungen $u=x-30$, $u=30-x$ und eine der zwei Gleichungen $v=y-10$, $v=10-y$ gilt. Die zwei Gleichungen $u=x-30$, $u=30-x$ führen genau dann auf dieselbe Zahl x, wenn $u=0$ gilt; ebenso führen die Gleichungen $v=y-10$, $v=10-y$ genau dann auf dieselbe Zahl y, wenn $v=0$ gilt.

Daher führt das Paar $(u;v)=(0;0)$ auf genau ein Paar $(x;y)$; jedes der 99 Paare $(u;v)=(0;1),\ldots,(0;99)$ und jedes der 99 Paare $(u;v)=(1;0),\ldots,(99;0)$ führt auf genau je zwei Paare $(x;y)$; und jedes der übrigen der Tabelle zu entnehmenden Paare $(u;v)$ führt auf genau je vier Paare $(x;y)$. Somit ist die gesuchte Anzahl

$$4\cdot 50\cdot 101-3-2\cdot(99+99)=20200-3-396=19801\,.$$

Andere Lösungsmöglichkeiten: Man kann mit der Fallunterscheidung
(A): $x\geq 30, y\geq 10$; (B): $x\geq 30, y<10$; (C): $x<30, y\geq 10$; (D): $x<30, y<10$
beginnen und in jedem dieser Fälle jeweils die Ungleichung
(A): $x-30+y-10<100$; (B): $x-30-y+10<100$; (C): $-x+30+y-10<100$;
(D): $-x+30-y+10<100$
diskutieren. So kann man zu (A) aus $x<140-y$ und $y\geq 10$ auf $x<130$ schließen und für jedes $x=30,\ldots,129$ die Werte y abzählen, für die $10\leq y<140-x$ gilt. Das läßt sich durch ähnliche Auszählungen wie oben durchführen, also etwa mit vierfachem Aufwand.

Man kann auch zu (A) die in einem *x*,*y*-Koordinatensystem durch $x\geq 30$, $y\geq 10$, $y<140-x$ gekennzeichneten Punkte betrachten, (Durchschnitt dreier Halbebenen, also) eine Dreiecksfläche. Entsprechend betrachtet man zu (B), (C), (D) je eine Dreiecksfläche. Die Vereinigungsmenge dieser vier Flächen ist eine Quadratfläche (siehe Abb. L340846), und dann hat man die Gitterpunkte (Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) in dieser Quadratfläche abzuzählen. Dabei kann man auch Symmetrie-Argumente nutzen und zu einem ähnlich einfachen Vorgehen wie im obigen Lösungstext kommen.

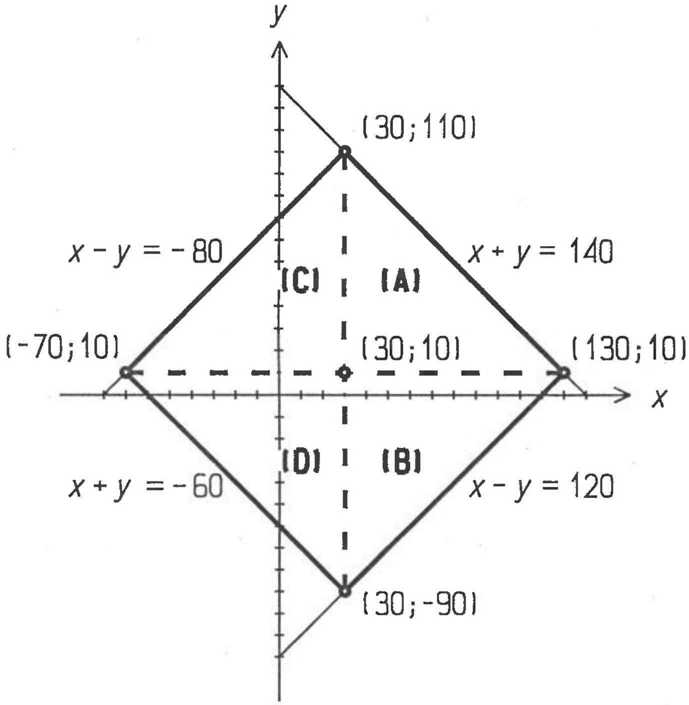

Abb. L340846

Vorschläge zur Punktverteilung

340844

Herleitung einer Beziehung zwischen s, r und $w_1 + \cdots + w_s$	4
Übergang zu einer Ermittlungsmöglichkeit für $w_1 + \cdots + w_s$	2
	6

340845

Zurückführung auf ein Flächeninhaltsverhältnis	1
Weitere Schlußfolgerungen (Rechnung oder z.B. Flächenbetrachtung von Quadraten) ...	3
Abschließende Herleitung der beiden Wertmöglichkeiten für den gesuchten Abstand	2
	6

340846

Ersichtlich zum Ziel führendes Abzählverfahren	3
Damit erreichte Ermittlung der gesuchten Anzahl	4
	7