34. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe (Länder-Olympiade)
Klasse 8
Lösungen
1. Tag

340831 Lösung: 6 Punkte

Die Ziffern auf den von Anna gewählten Kärtchen seien so mit a, b, c bezeichnet, daß $a > b > c$ gilt. Dann hat Anna die Zahlen $100a + 10b + c$ und $100a + 10c + b$ gelegt. Daher gilt Annas Aussage genau dann,
wenn diese Ziffern die Gleichung $$200a + 11 \cdot (b + c) = 1233 \qquad (1)$$
erfüllen.

I. Wenn (1) erfüllt wird, so folgt:
Wegen $0 \le c < b \le 8$ ist $1 \le b + c \le 15$, also $$11 \le 11 \cdot (b+c) \le 165 ,$$ $$1233 - 165 \le 1233 - 11 \cdot (b+c) \le 1233 - 11 .$$
Aus (1) folgt daher $$1068 \le 200a \le 1222 ,$$
wegen $1068 : 200 > 5$ und $1222 : 200 < 7$ also $$a = 6 . \qquad (2)$$
Aus (1) und (2) folgt $11 \cdot (b + c) = 1233 - 1200$, also $$b + c = 3 .$$
Dies kann von den Ziffern b, c mit $b > c$ nur dadurch erfüllt werden, daß
entweder $b = 3$, $c = 0$ oder $b = 2$, $c = 1$ (3)
gilt.

II. Bei beiden in (2), (3) genannten Möglichkeiten für a, b, c wird (1) erfüllt.

Mit I. und II. ist gezeigt: Es gibt genau die beiden Möglichkeiten, daß Anna entweder die beiden Zahlen 630 , 603 oder die beiden Zahlen 621 , 612 gelegt hat.
Als andere Lösungsvariante kann man (3) und dann (2) durch Diskussion des „Kryptogramms"

$$\boxed{\begin{array}{r} a\,b\,c \\ +\;a\,c\,b \\ \hline =1\,2\,3\,3 \end{array}}$$

erhalten.

340832 Lösung: 7 Punkte

Sind genau x Schüler in allen drei Arbeitsgemeinschaften, genau y Schüler in genau je zwei der Arbeitsgemeinschaften und genau z Schüler in genau je einer Arbeitsgemeinschaft, so gilt:
Die Anzahl aller Meldungen auf die Fragen des Lehrers ist $3x + 2y + z$; daher gilt
$$3x + 2y + z = 10 + 8 + 7 = 25 . \qquad (1)$$
Die Anzahl aller Schüler der Klasse ist $x + y + z + 6$; daher gilt
$$x + y + z = 26 - 6 = 20 . \qquad (2)$$
Subtrahiert man (2) von (1), so folgt $2x + y = 5$.
Diese Gleichung hat in natürlichen Zahlen x, y nur die im folgenden angegebenen Lösungen, zu denen nach (2) nur die dazu angegebenen Zahlen z gehören:

x	0	1	2
y	5	3	1
z	15	16	17

In keiner dieser Lösungen ist $x = 3$, also kann Uwes Meinung nicht zutreffen;

“ “ “ “ “ $y=2$, “ “ Michaels “ “ “ ;
“ “ “ “ “ $z=14$,“ “ Jörgs “ “ “ .

2.Lösungsweg:

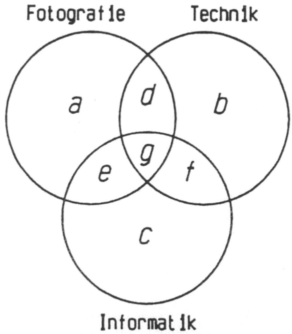


Abb. L340832

Für die in Abb. L340832 dargestellten Zahlen gilt

$$a+d+e+g=10\,, \tag{3}$$
$$b+d+f+g=\ 8\,, \tag{4}$$
$$c+e+f+g=\ 7\,, \tag{5}$$
$$a+b+c+d+e+f+g=20\,. \tag{6}$$

Addiert man (3), (4), (5) und subtrahiert (6), so folgt

$$d+e+f+2g=\ 5\,, \tag{7}$$

subtrahiert man dies von (6), so folgt

$$a+b+c-g=15\,. \tag{8}$$

Wäre $g=3$, so wäre $d+e+f+2g\geq 6$ im Widerspruch gegen (7); wäre $d+e+f=2$, so wäre $d+e+f+2g$ eine gerade Zahl, was (7) ebenfalls widerspricht; wäre $a+b+c=14$, so wäre $a+b+c-g\leq 14$ im Widerspruch gegen (8). Damit sind Uwes, Michaels und Jörgs Meinungen widerlegt.

Hinweis: Die drei Meinungen sind einzeln, jede für sich, zu widerlegen. Es genügt also nicht, aus der Annahme, daß $\big($(3) bis (6) und$\big)$ die *drei* Gleichungen $g=3$, $d+e+f=2$, $a+b+c=14$ zuträfen, einen Widerspruch herzuleiten.

340833 Lösung: 7 Punkte

Für je vier Punkte A, B, C, D, die die genannten Voraussetzungen erfüllen, gilt mit den Bezeichnungen b, c, e, f für die Maßzahlen der in cm gemessenen Längen $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BD}$ (siehe Abb. L340833 a):

Nach der Dreiecksungleichung für Dreieck ABD ist $5\leq f\leq 7$. (1,1')
“ “ “ “ “ ABC “ $6-e\leq b\leq 6+e$. (2,2')
“ “ “ “ “ ACD “ $c-1\leq e\leq c+1$. (3,3')
“ “ “ “ “ BCD “ $b-c\leq f\leq b+c$. (4,4')

Aus (1',1) und der Voraussetzung $\overline{AC}+\overline{BD}=11$ cm , d.h. $e+f=11$, (5)
folgt $4\leq e\leq 6$. (6,6')

Aus (2) und (3') folgt $5\leq b+c$, aus (2'), (3) und (6') folgt $b+c\leq 2e+7\leq 19$. (7)

Die somit gefundenen Ungleichungen $5\leq b+c\leq 19$ besagen wegen $\overline{AB}=6$ cm , $\overline{AD}=1$ cm :
Für je vier Punkte A, B, C, D, die die Voraussetzungen (*) erfüllen, gilt

$$12\text{ cm}\leq \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}\leq 26\text{ cm}\,.$$

Wenn speziell $12\text{ cm}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$, also $b+c=5$ gilt, so folgt nach (4'): Es gilt $f\leq 5$, nach (5) also $e\geq 6$. Zusammen mit (6') und nochmals (5) besagt dies $e=6$, $f=5$.

Damit hat man aus $\overline{AB}=6$ cm , $\overline{AD}=1$ cm , $f=5$ bzw. aus $b+c=f$ die Schlußfolgerungen, daß

D auf der Strecke AB , C auf der Strecke BD

liegen muß.
Daraus folgt: A, B, C, D liegen auf einer gemeinsamen Geraden (siehe Abb. L340833 b ; es folgt sogar $B = C$).

Wenn aber speziell $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 26$ cm , also $b + c = 19$ gilt, so folgt aus (7), daß $b + c = 2e + 7 = 19$, also $e = 6$ gilt. Nach (5) folgt $f = 5$. Aus (4) erhält man damit $2b \leq b + c + f = 19 + 5$, also $b \leq 12$; aus (3) erhält man $b + c \leq b + e + 1$, also $19 \leq b + 7$, $12 \leq b$. Es folgt $b = 12$, $c = 19 - b = 7$.
Damit hat man aus $\overline{AB} = 6$ cm , $b = 12$, $e = 6$ bzw. aus $b = 12$, $c = 7$, $f = 5$ die Schlußfolgerungen, daß

A auf der Strecke BC , D auf der Strecke BC

liegen muß. Daraus folgt: A, B, C, D liegen auf einer gemeinsamen Geraden (siehe Abb. L340833 c).

Die Bedingungen (1), (2) und (3) werden also von den Längen $\underline{x = 12 \text{ cm}}$ und $\underline{y = 26 \text{ cm}}$ erfüllt.

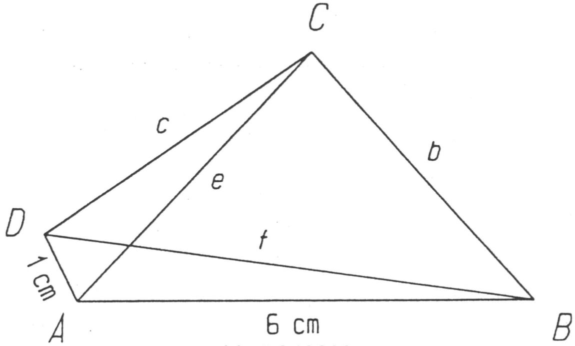


Abb. L340833 a

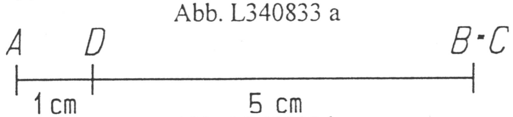


Abb. L340833 b

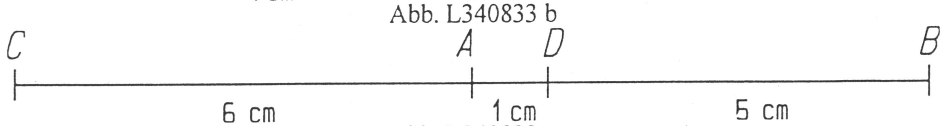


Abb. L340833 c

Vorschläge zur Punktverteilung

340831

Erste nutzbare Umformungen, z.B. Übergang zu Gleichungen, Ungleichungen, Kryptogramm-Betrachtung	2
Abschließende Ermittlung der beiden Möglichkeiten für die Ziffern	3
Bestätigung der geforderten Summe (kann in den vorigen Lösungsteilen mit erbracht sein)	1
	6

340832

Vorbereitender Schritt, z.B. (1),(2) oder (7),(8)	2
Widerlegung der drei Aussagen (z.B.: 2+2+1 Punkte)	5
	7

340833

Herleitung von $12\text{ cm} \le \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA} \le 26\text{ cm}$	3
Schluß von $12\text{ cm} = \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$ auf die Kollinearität von A, B, C, D	2
“ “ $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA} = 26\text{ cm}$ “ “ “ “ “	2
	7

34. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe (Länder-Olympiade)
Klasse 8

Lösungen
2. Tag

340834 Lösung: 6 Punkte

Haben an dem Turnier außer Michael und Robert noch genau $2x$ Spieler teilgenommen, so hat von diesen jeder gegen jeden anderen genau eine Partie gespielt; das waren insgesamt $\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (2x-1) = x \cdot (2x-1)$ Partien.

Wenn Michael und Robert in dem Turnier nicht gegeneinander gespielt haben, so haben sie in jeder der ersten 5 Runden zwei Partien gespielt. Daß zusammen mit diesen 10 Partien insgesamt

$$x \cdot (2x-1) + 10 = 38$$

Partien gespielt wurden, ist möglich; denn diese Gleichung hat (wie die Probe $4 \cdot 7 + 10 = 38$ zeigt) die Lösung $x = 4$. Also trifft Herberts Meinung nicht zu.

Ferner gilt: Hätten Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt, so hätten sie nur in 4 Runden je zwei Partien gespielt, in einer Runde dagegen nur die eine Partie gegeneinander. Dann wären, wenn die Gesamtzahl 38 der Partien die richtige ist, zusammen mit diesen 9 Partien insgesamt

$$x \cdot (2x-1) + 9 = 38$$

Partien gespielt worden. Diese Gleichung hat aber keine natürliche Zahl x als Lösung, wie z.B. daraus folgt, daß für alle natürlichen Zahlen $x \leq 4$ sich $x \cdot (2x-1) + 9 \leq 4 \cdot 7 + 9 = 37$ ergibt, für alle $x \geq 5$ dagegen $x \cdot (2x-1) + 9 \geq 5 \cdot 9 + 9 = 54$. Also scheidet die Möglichkeit aus, daß Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt haben könnten; d.h., aus den Angaben geht eindeutig hervor: Sie haben nicht gegeneinander gespielt; Gerts Meinung trifft zu.

Andere Lösungsvariante: Anstelle der hier als bekannter Sachverhalt zitierten Formel $\frac{1}{2} n \cdot (n-1)$ für die Anzahl der von n Spielern gespielten Partien (zwei-elementigen Untermengen einer n-elementigen Menge) kann man solche Anzahlen auch schrittweise erhalten, z.B:

2 Spieler spielen genau 1 Partie; je zwei weitere Spieler erhöhen die Partienzahl um das um 1 vergrößerte Doppelte der bisherigen Spielerzahl. Also spielen

4 Spieler	genau	$1 + 2 \cdot 2 + 1 =$	6 Partien,	
6	"	"	$6 + 2 \cdot 4 + 1 = 15$	" ,
8	"	"	$15 + 2 \cdot 6 + 1 = 28$	" ,
10	"	"	$28 + 2 \cdot 8 + 1 = 45$	" ,

. . . .

Da es genau eine Möglichkeit gibt, aus einer dieser Zahlen durch Addition von 9 oder 10 die Summe 38 zu erhalten, folgt: Die Partienzahl 38 ist möglich; und wenn sie die richtige ist, so spielten Michael und Robert 10 Partien, also nicht gegeneinander.

340835 Lösung: 7 Punkte

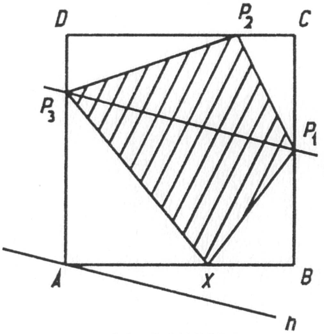


Abb. L340835

Das Viereck $XP_1P_2P_3$ setzt sich zusammen aus dem Dreieck XP_1P_3 und dem Dreieck $P_1P_2P_3$ bzw. es ist in den Fällen $\underline{\underline{X = P_1}}$, $\underline{\underline{X = P_3}}$ gleich dem letztgenannten Dreieck.

Daher ist sein Flächeninhalt genau in diesen beiden Fällen möglichst klein; und möglichst groß ist er genau dann, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks XP_1P_3 möglichst groß ist. Das ist genau dann der Fall, wenn der Abstand des Punktes X von der durch P_1 und P_3 gelegten Geraden g möglichst groß ist. Dies gilt genau für $\underline{\underline{X = A}}$. Beweis (siehe Abb. L340835): Die Parallele h durch A zu g hat wegen $\overline{P_3A} > \overline{P_1B}$ mit dem Qadrat $ABCD$, also auch mit dem gesamten Weg des Punktes X nur den Punkt A gemeinsam. Alle Punkte dieses Weges außer A liegen folglich in dem von g und h eingeschlossenen Parallelstreifen, näher an g als der Punkt A.

Damit sind die in (a) und (b) gesuchten Punkte X gefunden.

Wegen $\overline{CD} = a$ und $\overline{P_1C} = \frac{1}{2}a$, $\overline{P_3D} = \frac{1}{4}a$ hat das Trapez P_1CDP_3 den Flächeninhalt[1)]

$$\mathbf{F}\left(P_1CDP_3\right) = a \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a\right) = \frac{3}{8}a^2 ;$$

da außerden $\overline{P_2C} = \frac{1}{4}a$ und $\overline{P_2D} = \frac{3}{4}a$ gilt, ist weiter

$$\mathbf{F}\left(P_1CP_2\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{4}a = \frac{1}{16}a^2 \qquad \text{und}$$

$$\mathbf{F}\left(P_2DP_3\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}a \cdot \frac{1}{4}a = \frac{3}{32}a^2 ;$$

für die zu (a) gefundenen Punkte $X = P_1$ und $X = P_3$ ergibt sich damit als Flächeninhalt von $XP_1P_2P_3$

[1)] Der Flächeninhalt eines Vielecks mit den Eckpunkten $U_1, \ldots, U_k$ werde mit $\mathbf{F}\left(U_1, \ldots, U_k\right)$ bezeichnet.

$$\mathbf{F}(P_1P_2P_3)=\mathbf{F}(P_1CDP_3)-\mathbf{F}(P_1CP_2)-\mathbf{F}(P_2DP_3)=\frac{3}{8}a^2-\frac{1}{16}a^2-\frac{3}{32}a^2=\underline{\underline{\frac{7}{32}a^2}}\,.$$

Mit $\overline{AB}=a$ und $\overline{BP_1}=\frac{1}{2}a$ erhält man $\mathbf{F}(ABP_1)=\frac{1}{4}a^2$ und damit für den zu (b) gefundenen Punkt $X=A$ als Flächeninhalt von $XP_1P_2P_3$

$$\mathbf{F}(AP_1P_2P_3)=\mathbf{F}(ABCD)-\mathbf{F}(P_1CP_2)-\mathbf{F}(P_2DP_3)-\mathbf{F}(ABP_1)=a^2-\frac{1}{16}a^2-\frac{3}{32}a^2-\frac{1}{4}a^2=\underline{\underline{\frac{19}{32}a^2}}\,.$$

<u>340836 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

(a) Es sei ABC ein beliebiges Dreieck; die auf BC senkrechte Höhe habe den Fußpunkt D. Für $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$, $h=\overline{AD}$ und den Flächeninhalt F des Dreiecks ABC gilt dann: Ist $D=C$, so ist $h=b$; ist aber $D\neq C$, so ist ACD ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei D, also gilt dann $h<b$ (siehe Abb. L340836 a).

Damit folgt in jedem Fall $F=\dfrac{a\cdot h}{2}\leq\dfrac{a\cdot b}{2}$, w.z.b.w.

(b) Zu jedem Viereck mit einer einspringenden Ecke gibt es ein Viereck ohne einspringende Ecken, das dieselben Seitenlängen wie das ursprüngliche Viereck hat (siehe Abb. L340836 b); es hat größeren Flächeninhalt als das ursprüngliche. Daher genügt es, zum Beweis ein Viereck $ABCD$ ohne einspringende Ecken vorauszusetzen (siehe Abb. L340836 c).

Für den Flächeninhalt F des Vierecks $ABCD$ und die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, F_4 der Dreiecke ABC, BCD, CDA, DAB gilt

$$F=F_1+F_3=F_2+F_4$$

sowie nach (a)
$$F_1\leq\frac{a\cdot b}{2},\ F_2\leq\frac{b\cdot c}{2},\ F_3\leq\frac{c\cdot d}{2},\ F_4\leq\frac{d\cdot a}{2}\,.$$

Daraus folgt

$$2F=F_1+F_2+F_3+F_4\leq\frac{a\cdot b}{2}+\frac{b\cdot c}{2}+\frac{c\cdot d}{2}+\frac{d\cdot a}{2}\,,$$

also

$$F\leq\frac{(a+c)\cdot(b+d)}{4}\,,$$

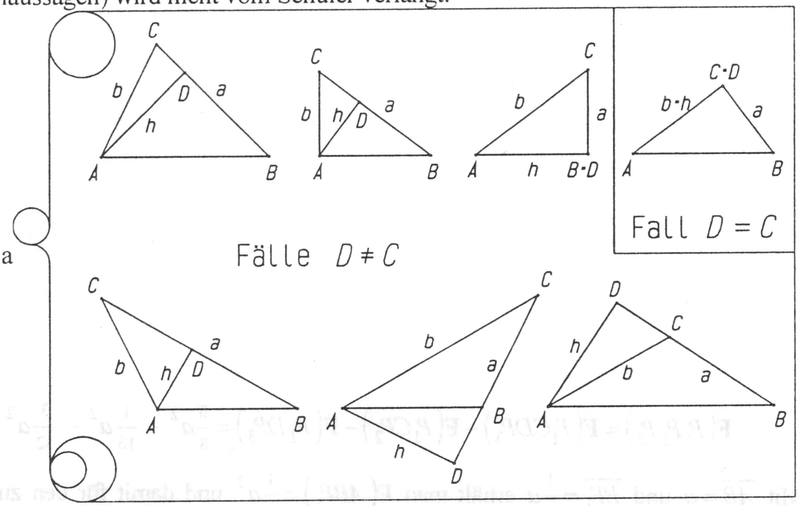
w.z.b.w.

<u>Bemerkungen:</u> Wird zu (a) eine andere Fallunterscheidung angesetzt, so kann diese im Vergleich mit der obigen unnötig detailliert sein (vergleiche etwa Abb. L340836 a). Darin liegt

jedoch kein Kriterium für die Bewertung eines solchen Lösungsweges; hierfür ist vielmehr entscheidend, ob alle Möglichkeiten erkennbar berücksichtigt sind.
(Abgesehen davon wird eine zeichnerische Wiedergabe nicht vom Schüler verlangt.)

In (a) gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn das Dreieck rechtwinklig ist und a und b seine Kathetenlängen sind; in (b) gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn das Viereck ein Rechteck ist. Eine Betrachtung oder Begründung dieser Aussagen (insbesondere der „nur dann"-Teilaussagen) wird nicht vom Schüler verlangt.

Abb. L340836 a



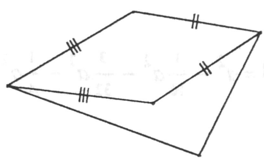


Abb. L340836 b

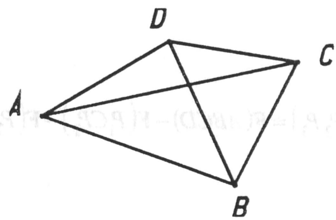


Abb. L340836 c

Vorschläge zur Punktverteilung

340834

Nutzbare Aussage über Partienzahlen, z.B. $2x$ Spieler $\Rightarrow$ $x \cdot (2x-1)$ Partien 2

Möglichkeit der Partienzahl 38 2

Widerlegung der Annahme, Michael und Robert hätten gegeneinander gespielt 2

6

340835

Minimaler Flächeninhalt genau für $X = P_1$ und $X = P_3$ 1

Maximaler " " " $X = A$ 2

Minimaler Flächeninhalt $\frac{7}{32}a^2$ 2

Maximaler " $\frac{19}{32}a^2$ 2

7

340836

(a) Nachweis von $h \leq b$ bei ersichtlicher Berücksichtigung aller möglichen Fälle oder anderer geeigneter Vorbereitungsschritt 2

Abschließende Herleitung von $F \leq \frac{a \cdot b}{2}$ 1

(b) Vorbereitung, z.B. mehrmalige Anwendung von (.... 3

Abschließende Herleitung von $F \leq \frac{(a+c)\cdot(b+d)}{4}$ 1

7