Umlauf

34. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe (Kreisolympiade)
Aufgaben
Klasse 8

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

340821

Eine vierstellige natürliche Zahl heiße genau dann „symmetrisch", wenn ihre Tausenderziffer gleich ihrer Einerziffer und ihre Hunderterziffer gleich ihrer Zehnerziffer ist.
Tanja behauptet, daß jede vierstellige symmetrische Zahl durch 11 teilbar ist.

(a) Überprüfe diese Teilbarkeit an drei selbstgewählten Beispielen!
(b) Beweise allgemein Tanjas Behauptung!
(c) Wie viele vierstellige symmetrische Zahlen gibt es insgesamt?
(d) Wie viele geradzahlige vierstellige symmetrische Zahlen gibt es insgesamt?

340822

Aus den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sollen zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ so gebildet werden, daß jede Ziffer in den Zifferndarstellungen der vier natürlichen Zahlen a, b, c, d insgesamt genau einmal verwendet wird. Für die so gebildeten Brüche soll $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1$ gelten. In dem ersten der beiden Brüche soll $a=13$ und $b=26$ gewählt werden.
Beweise, daß es genau eine Möglichkeit gibt, den Zähler c und den Nenner d des zweiten Bruches so zu wählen, daß alle genannten Bedingungen erfüllt sind! Gib diesen zweiten Bruch an!

340823

(a) Wie oft insgesamt stehen im Verlaufe von 24 Stunden (von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr) der Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?
(b) Berechne insbesondere alle derartigen Zeitpunkte zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr! Gib diese Zeitpunkte so an, wie sie eine Digitaluhr anzeigen würde, von der wir voraussetzen, daß sie korrekt geht, d. h. zu Beginn jeder Sekunde die richtige Stunden-, Minuten- und Sekundenanzeige bringt!

340824

Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AB}=6\text{ cm}$. Auf der Seite AD sei Q derjenige Punkt, für den $\overline{AQ}=4\text{ cm}$ gilt. Für jeden Punkt P, der auf der Strecke QC liegt, bezeichne L den Fußpunkt des von P auf BC gefällten Lotes; ferner bezeichne F_1, F_2 bzw. F_3 in dieser Reihenfolge den Flächeninhalt des Dreiecks APQ, des Dreiecks ABP bzw. des Dreiecks BCP.

(a) Ermittle die Länge der Strecke PL und den Flächeninhalt F_1, wenn vorausgesetzt wird, daß P so auf QC gewählt wurde, daß $F_3=7{,}5\text{ cm}^2$ gilt!

(b) Ermittle die Länge der Strecke PL und den Flächeninhalt F_2 , wenn vorausgesetzt wird, daß P so auf QC gewählt wurde, daß $F_1 = F_3$ gilt!

(c) Beschreibe und begründe, wie man P so auf QC konstruieren kann, daß $F_2 = F_3$ gilt!

34. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe (Kreisolympiade)
Lösungen
Klasse 8

340821 Lösung: 10 Punkte

(a) Man bestätigt zum Beispiel $3443:11=313$, $5555:11=505$, $9009:11=819$.

(b) Jede vierstellige symmetrische Zahl z ist mit zwei natürlichen Zahlen a, b von der Form
$$z=1000a+100b+10b+a=11\cdot(91a+10b), \qquad (1)$$
also, da $91a+10b$ eine natürliche Zahl ist, durch 11 teilbar.

Bemerkung: Man kann zu (a) und (b) auch die Teilbarkeitsregel heranziehen: Für die vier Ziffern a, b, b, a von z ist die alternierende Summe $a-b+b-a=0$ durch 11 teilbar, also trifft das auch auf z zu.

(c) In (1) gibt es für die Ziffer a die 9 Möglichkeiten $1,2,\ldots,9$ und, unabhängig hiervon, für die Ziffer b die 10 Möglichkeiten $0,1,2,\ldots,9$. Also gibt es insgesamt $9\cdot 10=90$ vierstellige symmetrische Zahlen.

(d) Da z genau dann gerade ist, wenn die Einerziffer a gerade ist, gibt es nun für a die 4 Möglichkeiten $2,4,6,8$. Für b hat man dieselben Möglichkeiten wie in (c). Also gibt es insgesamt $4\cdot 10=40$ geradzahlige vierstellige symmetrische Zahlen.

340822 Lösung: 10 Punkte

I. Wenn die Bedingungen der Aufgabe von zwei natürlichen Zahlen c und d erfüllt werden, so folgt:

Wegen $a=13$ und $b=26$ folgt aus $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1$, daß $\frac{c}{d}=\frac{1}{2}$, also
$$2\cdot c=d \qquad (1)$$
gilt. Ferner folgt, daß in den Ziffemdarstellungen von c und d nur die Ziffern 0, 4, 5, 7, 8, 9 vorkommen, jede insgesamt genau einmal.

Wäre c höchstens zweistellig, also d mindestens vierstellig, so wäre $c\leq 99$, $d\geq 1000$; wäre c mindestens vierstellig, d höchstens zweistellig, so wäre $c\geq 1000$, $d\leq 99$; beides im Widerspruch zu (1). Also sind c und d beide dreistellig.

Die Hunderterziffer von c ist 4, da sonst d wegen (1) vierstellig wäre. Die Einerziffer von d ist wegen (1) gerade, also entweder 0 oder 8. Wäre sie 8, so müßte c wegen (1) (und da die 4 schon als Hunderterziffer von c vergeben ist) die Einerziffer 9 haben. Damit aber wäre die Hunderterziffer von d weder 8 noch 9, was wegen der Hunderterziffer 4 von c im Widerspruch zu (1) steht.

Daher hat d die Einerziffer 0 und folglich c die Einerziffer 5. Die Zehnerziffer von c ist weder 7 noch 9; denn wegen (1), also $2\cdot 475=950$ bzw. $2\cdot 495=980$, käme die Ziffer 5 bzw. 9 zweimal vor.

Hiernach und wegen (1) verbleibt nur die Möglichkeit
$$c=485\ ,\ d=970\ . \qquad (2)$$

II. Diese beiden Zahlen haben die geforderten Ziffern, und sie erfüllen auch (1), also $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1$.

Mit I. und II. ist gezeigt, daß genau der mit den Zahlen (2) gebildete Bruch $\frac{485}{970}$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

340823 Lösung: 10 Punkte

(a) Da beide Zeiger mit gleichbleibenden Geschwindigkeiten gehen, gilt: Kommen im Verlauf von 24 Stunden (wobei etwa der Anfang dieser Zeitspanne mit dazugerechnet werde, aber nicht das Ende) die Zeiger genau n mal miteinander zur Deckung, so gibt es in dieser Zeitspanne auch genau n Zeitpunkte, in denen der Minutenzeiger um $90°$ vor dem Stundenzeiger steht, und auch genau n Zeitpunkte, in denen der Minutenzeiger um $90°$ hinter dem Stundenzeiger steht.

Diese Zahl n kann man folgendermaßen finden: In 12 Stunden macht der Minutenzeiger genau 12 vollständige Umläufe, der Stundenzeiger genau einen Umlauf. Also muß es in dieser Zeitspanne genau 11 Zeitpunkte geben, in denen der Minutenzeiger den Stundenzeiger überholt. In 24 Stunden sind es doppelt so viele Zeitpunkte; d. h., es gilt $n=22$. Also stehen die Zeiger im Verlauf von 24 Stunden insgesamt 44 mal aufeinander senkrecht.

(b) Um 4 Uhr steht der Stundenzeiger 20 Teilstriche vor dem Minutenzeiger. Hat sich nach x Minuten dieser Abstand zum ersten Mal um 5 Teilstriche verringert, so deshalb, weil der Minutenzeiger um x Teilstriche vorgerückt ist, der Stundenzeiger aber nur um $\frac{x}{12}$ Teilstriche. Also gilt $x=5+\frac{x}{12}$. Daraus folgt $12x=60+x$, $x=60:11=5\frac{5}{11}$; d. h., der erste gesuchte Zeitpunkt ist $5\frac{5}{11}$ Minuten nach 4 Uhr. Digital wird dieser Zeitpunkt wegen $5\cdot 60:11=300:11=27\frac{3}{11}$ als **04:05:27** angezeigt.

Hat aber y Minuten nach 4 Uhr der Minutenzeiger den Stundenzeiger überholt, also den ursprünglichen Abstand von 20 Teilstrichen aufgebraucht und steht dann erstmals 15 Teilstriche vor dem Stundenzeiger, so gilt $y=20+15+\frac{y}{12}$, $12y=12\cdot 35+y$, $y=420:11=38\frac{2}{11}$. Für einen zweiten gesuchten Zeitpunkt erhält man so wegen $2\cdot 60:11=120:11=10\frac{10}{11}$ die digitale Anzeige **04:38:10**.

Bemerkungen: Durch die Bezugnahme auf digitale Anzeige soll veranlaßt werden, daß Bruchteile von Sekunden stets abgerundet (also auch wenn sie 0,5 überschreiten, nicht aufgerundet) werden; jedoch sollte eine Abweichung von dieser Festlegung hier nicht in die Punktbewertung eingehen, da für den eigentlichen Aufgabeninhalt unwesentlich.
Es gibt zahlreiche andere Lösungsvarianten, von einer mit wenig Rechnung auskommenden Betrachtung wie in (a), die auch als Zerlegung des Zeitintervalls formuliert werden und damit für (b) nutzbar gemacht werden kann, bis zu durchgehend rechnerischer Ausführung. Bei

dieser können statt der hier gewählten Teilstriche auch andere Maßeinheiten gewählt werden, z. B. Winkelgrade oder Zeit-Maßeinheiten.

340824 Lösung: 10 Punkte

(a) (Siehe Abb. L 340824 a :) Wegen $PL \perp BC$ ist $F_3 = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{PL}$, also $\overline{PL} = 2F_3 : \overline{BC} = 15\,\text{cm}^2 : 6\,\text{cm} = 2{,}5\,\text{cm}$. Verlängert man LP über P hinaus bis zum Schnitt H mit AD, so ist $ABLH$ ein Rechteck, also gilt $\overline{LH} = 6\,\text{cm}$, $\overline{PH} = (6-2{,}5)\,\text{cm} = 3{,}5\,\text{cm}$; ferner ist PH die auf AQ senkrechte Höhe des Dreiecks APQ, also gilt

$$F_1 = \tfrac{1}{2}\overline{AQ} \cdot \overline{PH} = 2\,\text{cm} \cdot 3{,}5\,\text{cm} = 7\,\text{cm}^2 .$$

(b) Wegen

$$F_1 = \tfrac{1}{2}\overline{AQ} \cdot \overline{PH} ,$$

$$F_3 = \tfrac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{PL} \qquad (1)$$

und $\frac{1}{2}\overline{AQ} = 2\,\text{cm}$, $\frac{1}{2}\overline{BC} = 3\,\text{cm}$ sowie der Voraussetzung $F_1 = F_3$ gilt $2 \cdot \overline{PH} = 3 \cdot \overline{PL}$, also $\overline{PH} = \frac{3}{2}\overline{PL}$. Hieraus und aus $\overline{PH} + \overline{PL} = 6\,\text{cm}$ folgt $\left(\frac{3}{2}+1\right) \cdot \overline{PL} = 6\,\text{cm}$, also

$$\overline{PL} = 6\,\text{cm} : \tfrac{5}{2} = 2{,}4\,\text{cm} . \qquad (2)$$

Nach (1) und (2) ist dann $F_3 = 3 \cdot 2{,}4\,\text{cm}^2 = 7{,}2\,\text{cm}^2$, also auch $F_1 = 7{,}2\,\text{cm}^2$. Ferner hat das Dreieck CDQ den Flächeninhalt $\frac{1}{2}\overline{CD} \cdot \overline{DQ} = 3 \cdot 2\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2$. Damit erhält man

$$F_2 = (36 - 2 \cdot 7{,}2 - 6)\,\text{cm}^2 = 15{,}6\,\text{cm}^2 .$$

(c) Die Bedingung $F_2 = F_3$ wird wegen $\overline{AB} = \overline{BC}$ dann erfüllt, wenn die Dreiecke ABP und BCP in den Längen der auf AB bzw. BC senkrechten Höhen übereinstimmen, d. h. wenn P auf der Winkelhalbierenden des von AB und BC gebildeten Winkels liegt. Das ist die Diagonale BD. Damit ist begründet: Die geforderte Bedingung wird erfüllt, wenn man P als Schnittpunkt der Strecken CQ und BD konstruiert (siehe Abb. L 340824 b).

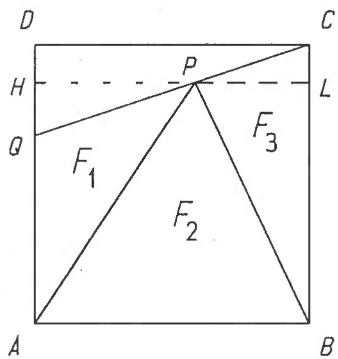

Abb. L 340824 a

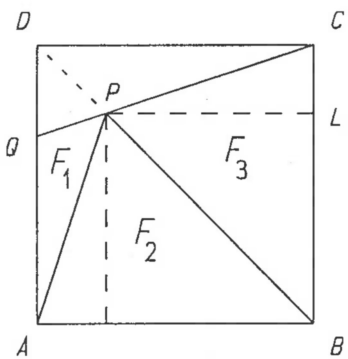

Abb. L 340824 b

Vorschläge zur Punktverteilung

340821

(a) Als Bestätigung geeignete Beispiele 2
(b) Teilbarkeitsnachweis (durch rechnerische Umformung der Zifferndarstellung oder mit Teilbarkeitsregel) 3
(c) Anzahlermittlung (ersichtliche Berücksichtigung aller Möglichkeiten, jede genau einmal) 3
(d) " " " " " " " " 2

10

340822

Gewinnung von (1) (oder gleichwertiger Beziehung) 2
Ersichtlich erkannte Notwendigkeit, daß c und d dreistellig sein müssen 2
Drei aufwendigere Ziffernermittlungen (je nach Lösungsvorgehen, z. B.: Hunderterziffer von c, Einerziffer von d, Zehnerziffer von c) 4
Restliche Ziffernermittlungen und Probe (die auch im Verlauf der Ermittlung implizit, in Gestalt rechnerischer Bestätigung, als erbracht gewertet werden kann) 2

10

340823

(a) Weiter nutzbares Motiv (z. B. Zerlegung des Zeitintervalls 12 Stunden in 11 gleichlange Teile oder, bei rechnerischem Vorgehen, z. B. Gewinnung einer Gleichung für eine geeignete Unbekannte) 2
Abschließende Herleitung der gesuchten Anzahl 1
(b) Gewinnung und Auflösung einer Gleichung (oder nochmals Argumentation mit Intervallzerlegung) 3
Abschließende Herleitung der digitalen Anzeige 1
(c) Ebenfalls: Gewinnung und Auflösung einer Gleichung (oder Argumentation mit Intervallzerlegung) 2
Abschließende Herleitung der digitalen Anzeige 1

10

340824

(a) Berechnungen etwa in der Abfolge $\overline{PL}$, $\overline{PH}$, F_1: 1+1+1 Punkte 3
(b) " " " " " $\overline{PL}$, F_2: 2+2 Punkte 4
(c) Herleitung: P auf der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ 2
Beschreibung (oder an ausgeführter Konstruktion ersichtlich): P Schnittpunkt von CQ und BD 1

10