34. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe (Länder-Olympiade)
Klasse 7
Lösungen
1. Tag

340731 Lösung: 6 Punkte

Wenn die Bedingungen der Aufgabe von einer natürlichen Zahl n erfüllt werden, so folgt:
Wäre Evelyns Aussage (2) falsch, also n durch 27 teilbar, so wäre n auch durch 9 teilbar, d.h. auch Evelyns Aussage (1) falsch. Das widerspricht den Bedingungen der Aufgabe. Also ist Evelyns Aussage (2) wahr und (nochmals nach den Bedingungen der Aufgabe) ihre Aussage (1) falsch. Das besagt: n ist durch 9, aber nicht durch 27 teilbar.
Wäre Franziskas Aussage (1) wahr, so wäre wegen $91809 : 101 = 909$ auch Franziskas Aussage (2) wahr. Wieder kann dies nach den Bedingungen der Aufgabe nicht sein, sondern es folgt: Aussage (1) ist falsch, Aussage (2) wahr, also lautet n nicht 91809, ist aber durch 101 teilbar.
Damit ist gezeigt: Zerlegt man n in Primfaktoren, so kommt in dieser Zerlegung die Primzahl 3 genau zweimal und die Primzahl 101 mindestens einmal vor. Also ist n mindestens dreistellig und daher Dirks Aussage (1) falsch. Somit ist Dirks Aussage (2) wahr. Außer den Primzahlen 3 und 101 kommt bei der Zerlegung von n in Primfaktoren daher keine weitere Primzahl vor. Käme 101 genau zweimal vor, so wäre $n = 3^2 \cdot 101^2 = 91809$, was bereits widerlegt ist; käme 101 mehr als zweimal vor, so wäre $n \geq 3^2 \cdot 101^3 > 100^3$, also läge n nicht zwischen 1 und 1000000. Also kommt 101 genau einmal vor; es gilt $n = 3^2 \cdot 101 = 909$.
Somit ist die gesuchte Zahl durch die Bedingungen der Aufgabe eindeutig bestimmt, sie lautet 909.

340732 Lösung: 8 Punkte

(a) Die Zahl z hat ihre Ziffern aus den 9 einstelligen Zahlen 1,...,9, den 90 zweistelligen Zahlen 10,...,99 und der dreistelligen Zahl 100. Also hat sie $9 + 90 \cdot 2 + 3 = 192$ Stellen.

(b) Von den 192 Ziffern der Zahl z sollen in z' genau 92 Ziffern erhalten bleiben. Von zwei 92-stelligen Zahlen, die mit verschiedener Anzahl von Neunen beginnen, ist diejenige die größere, die mit der größeren Anzahl von Neunen beginnt.
Vor der ersten in z auftretenden Neun stehen 8 von Neun verschiedene Ziffern, vor der zweiten weitere 19, vor der dritten, vierten und fünften wiederum je weitere 19 von Neun verschiedene Ziffern. Streicht man diese, so sind insgesamt bereits $8 + 4 \cdot 19 = 84$ Ziffern entfernt; aus der danach verbleibenden Zahl

$$99999505152535455565758596 0 \ldots 9899100$$

sind noch genau 16 Ziffern zu streichen.
Das können nicht die 19 Ziffern bis zur ersten auf den Anfang 99999 folgenden Neun und auch nicht die 17 Ziffern bis zur ersten auf 99999 folgenden Acht sein. Von je zwei 92-stelligen Zahlen, die mit 99999 beginnen und an der sechsten Stelle verschiedene Ziffern haben, ist stets diejenige die größere, die an der sechsten Stelle die größere Ziffer hat. Die größte Möglichkeit hierfür ist somit, durch Streichen der ersten auf 99999 folgenden 15 Ziffern den Anfang 999997 zu erreichen. Danach ist noch genau eine Ziffer zu streichen.
Von den beiden Möglichkeiten, die auf den Anfang 999997 folgende Fünf zu streichen oder stehenzulassen (und eine später stehende Ziffer zu streichen), liefert das Streichen der Fünf die größere Zahl.

Damit ist gefunden, welche 100 Ziffern aus z zu streichen sind, um eine möglichst große Zahl z' zu erhalten. Die ersten zehn Ziffern dieser Zahl lauten 9999978596.

340733 Lösung: 7 Punkte

(a) Da bei Spiegelung jeder Punkt der Geraden, an der gespiegelt wird, fest bleibt und jedes Dreieck in ein kongruentes Dreieck übergeht, gilt $\Delta\, ACE \cong \Delta\, ACD$ und $\Delta\, BCF \cong \Delta\, BCD$ (siehe Abb. L340733 a). Daher ist der Flächeninhalt von $ABFCE$ doppelt so groß wie der von ABC. Dieser beträgt nach Voraussetzung $\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CD} = 14\ \text{cm}^2$, also hat $ABFCE$ den Flächeninhalt $\underline{28\ \text{cm}^2}$.

Ferner folgt $\overline{AE} = \overline{AD}$ und $\overline{BF} = \overline{BD}$, also $\overline{AE} + \overline{BF} = \overline{AB}$, sowie $\overline{CE} = \overline{CF} = \overline{CD}$. Damit ergibt sich für den Umfang von $ABFCE$ der Wert $2 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot \overline{CD} = \underline{22\ \text{cm}}$.

(b) Mit den Bezeichnungen $\overline{\angle BAC} = \alpha$ und $\overline{\angle ABC} = \beta$ gilt nach dem Innenwinkelsatz für die Dreiecke ADC und BDC sowie wegen der Spiegelungen $\overline{\angle ACE} = \overline{\angle ACD} = 90° - \alpha$ und $\overline{\angle BCF} = \overline{\angle BCD} = 90° - \beta$.

Für $\overline{\angle ACB} = \gamma$ gilt wegen der Voraussetzung $\overline{\angle ECF} = 180°$ (siehe Abb. L340733 b) daher

$$90° - \alpha + \gamma + 90° - \beta = 180°.$$

Wegen $180° - \alpha - \beta = \gamma$ (Innenwinkelsatz für das Dreieck ABC) folgt $2\gamma = 180°$, also $\gamma = \underline{90°}$.

Ferner sind wegen $\Delta\, ACE \cong \Delta\, ACD$ und $\Delta\, BCF \cong \Delta\, BCD$, also $\overline{\angle AEC} = \overline{\angle BFC} = 90°$ die Strecken AE und BF beide auf EF senkrecht und somit zueinander parallel. Damit ist $ABFE$ als Trapez nachgewiesen.

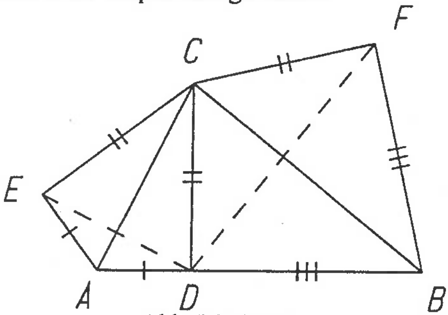

Abb. L340733 a

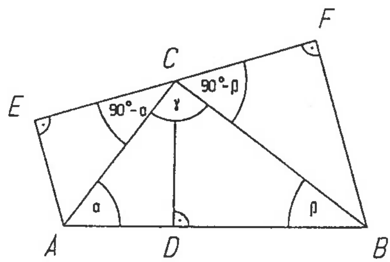

Abb. L340733 b

Vorschläge zur Punktverteilung

340731

Erster nutzbarer Teilschritt, z.B: n ist durch 9, aber nicht durch 27 teilbar	2
Weitere Teilaussage, z.B.: Primzerlegung $n = 3^e \cdot 101^f$ mit $e = 2$ und $f \geq 1$	2
Abschließende Ermittlung von n	2
	6

340732

(a) Stellenzahl von z	2
(b) Erste nutzbare Aussage, z.B.: Streichen der ersten 84 von Neun verschiedenen Ziffern	2
Weitere " " , " : Streichen weiterer 15 Ziffern	2
Abschließendes Ergebnis, Angabe der ersten 10 Ziffern von z'	2
	8

340733

(a) Herleitung des Flächeninhalts	2
Herleitung des Umfangs	1
(b) Schluß auf $\gamma = 90^\circ$	2
" " $AE \parallel BF$	2
	7

34. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe (Länder-Olympiade)
Klasse 7
Lösungen
2. Tag

340734 Lösung: 6 Punkte

Man kann für jeden der 1995 Eckpunkte des 1995-Ecks die Verbindungsstrecke zu jedem der 1994 anderen Eckpunkte betrachten. Damit hat man jede der insgesamt vorhandenen Verbindungsstrecken zwischen je zwei Eckpunkten genau zweimal betrachtet. Also gibt es genau $1995 \cdot 1994 : 2 = 1995 \cdot 997$ solche Verbindungsstrecken. Von ihnen sind genau 1995 keine Diagonalen, sondern Seiten des 1995-Ecks. Die Anzahl der Diagonalen beträgt folglich

$$1995 \cdot 997 - 1995 = 1995 \cdot 996 = 1987020.$$

Hinweis zur Korrektur: Das alleinige Zitieren einer (möglicherweise aus dem Unterricht oder aus außerunterrichtlicher Arbeit bekannten) Formel für die Anzahl der Diagonalen eines n-Ecks kann bei dieser Aufgabe nicht als ausreichend gewertet werden, da im Aufgabentext ausdrücklich eine Begründung verlangt wurde. Eine ausformulierte Begründung dafür, daß jedes 1995-Eck genau 1995 Seiten hat, wird dagegen nicht vom Schüler verlangt.
Als akzeptabel kann auch gelten, wenn (in einem anderen Lösungsweg) mit dem Motiv des schrittweisen Erhöhens der Eckenzahl die Diagonalenzahl $2 + 3 + \cdots 1993$ hergeleitet wird und danach ein Hilfsmittel zur Auswertung dieser Summe (Summenformel, Umordnung der Summanden o.ä.) als bekannter Sachverhalt zitiert wird.

340735 Lösung: 6 Punkte

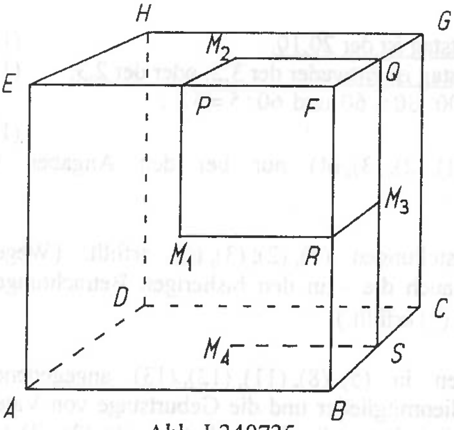

Abb. L340735

Für jede Seitenfläche eines Würfels der Kantenlänge a gilt (wie etwa mit den Bezeichnungen der Seitenfläche $ABFE$ in Abb. L340735 ausgedrückt sei): Die Verbindungsstrecke des Quadratmittelpunktes M_1 mit dem Mittelpunkt P der Strecke EF ist parallel zu BF, also senkrecht auf allen Geraden in der Ebene des Quadrates $EFGH$, und es gilt $\overline{M_1P} = \frac{a}{2}$.

Wendet man auch die entsprechenden Aussagen für M_2P an, so folgt: Das Dreieck M_1PM_2 ist mit $\overline{M_1P} = \overline{M_2P} = \frac{a}{2}$ gleichschenklig und bei P rechtwinklig. Entsprechendes gilt für die Dreiecke M_1RM_3 und M_2QM_3.

Daraus folgt Alexandras Aussage $\overline{M_1M_2} = \overline{M_1M_3} = \overline{M_2M_3}$.

Ferner folgt $\angle M_2M_3Q = \angle M_4M_3S = 45^\circ$ und damit Daniels Aussage $\angle M_2M_3M_4 = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.

Bemerkung: Es gibt mehrere Lösungsvarianten, z.B. unter Nutzung der Rechteckeigenschaften von SQM_2M_4 , der Eigenschaften des Würfelmittelpunktes (des Schnittpunktes der Körperdiagonalen), unter Anwendung des Thalessatzes, der Umkehrung des Satzes von Pythagoras usw.. Dabei kann das Zitieren von Würfeleigenschaften als bekannter Sachverhalt etwa in gleichem Ausmaß wie bei obiger Beweisvariante akzeptiert werden.

340736 Lösung:

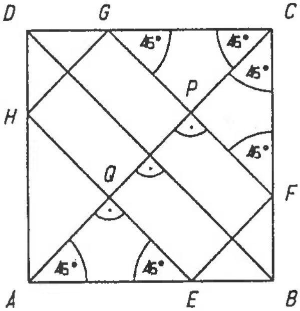

Abb. L340736

(a) Da die Diagonalen des Quadrates aufeinander senkrecht stehen, gilt wegen $FG \parallel BD$ auch $FG \perp AC$ (siehe Abb. L340736). Da die Diagonalen die Innenwinkel des Quadrates halbieren, gilt für den Schnittpunkt P von FG mit AC ferner $\overline{\angle FCP} = \overline{\angle GCP}$. Damit folgt nach dem Kongruenzsatz sww, daß $\Delta FCP \cong \Delta GCP$, also $\overline{FC} = \overline{GC}$ gilt. Wegen $\overline{BC} = \overline{DC}$ folgt dann auch $\overline{BF} = \overline{DG}$ Damit und mit entsprechenden Schlußfolgerungen aus $EF \parallel AC$ und $HG \parallel AC$ erhält man $\overline{EB} = \overline{BF} = \overline{HD} = \overline{DG}$; hiernach und wegen $\overline{\angle EBF} = \overline{\angle HDG} = 90^\circ$ ist $\Delta EBF \cong \Delta HDG$, also $\overline{EF} = \overline{HG}$.

Also sind im Viereck $EFGH$ die Seiten EF und HG einander gleichlang und parallel, daher ist es ein Parallelogramm. Da außerdem FG auf AC und damit auch auf EF senkrecht steht, ist $EFGH$ als Rechteck nachgewiesen.

(b) Für den Schmittpunkt Q von EH mit AC ist wegen $EF \parallel AC$ auch $EFPQ$ ein Rechteck, also gilt $\overline{EF} = \overline{QP}$ und $\overline{EQ} = \overline{FP}$. Damit und mit $\overline{\angle AQE} = \overline{\angle CPF} = \overline{\angle CPG} = 90^\circ$ sowie $\overline{\angle AEQ} = \overline{\angle CFP} = \overline{\angle CGP} = 45^\circ$ erweisen sich AEQ, CFP und CGP als zueinander kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, und es ergibt sich $\overline{AQ} = \overline{CP} = \overline{FP} = \overline{GP}$. Insgesamt hat man nun $\overline{EF} + \overline{FP} + \overline{GP} = \overline{QP} + \overline{AQ} + \overline{CP} = \overline{AC}$; d.h., der halbe Umfang des Rechtecks $EFGH$ ist gleich der Länge von AC, der Umfang beträgt also für jedes derartige Rechteck 20 cm.

Vorschläge zur Punktverteilung

340734

Ersichtliche Einführung eines Motivs, das eine Ermittlung der gesuchten Anzahl ermöglicht, z.B. Betrachtung der von jeder Ecke zu den anderen Ecken ausgehenden Strecken oder z.B. schrittweise Erhöhung der Eckenzahl (ggf. mit genauerer Beschreibung hinzuzufügender Ecken) 2

Rechnerische Umsetzung dieses Motivs 2

Abschließende Herleitung der Diagonalenzahl 2

7 Punkte 6

340735

Nachweis, daß $M_1 M_2 M_3$ gleichseitig ist 3

Nachweis, daß $M_2 M_3 M_4$ rechtwinklig ist 3

6

340736

(a) Nachweis, daß *EFGH* ein Rechteck ist
(z.B.: $FC \parallel GC$, $\overline{EF} = \overline{HG}$, $FG \perp EF$: 1+2+1 Punkte) 4

(b) Ermittlung des Umfangs von *EFGH* 3

7