34. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe (Länder-Olympiade)
Klasse 5
Lösungen

340531 Lösung: 9 Punkte

(a) Da ein Paket 50 Tüten enthält und der Inhalt jeder Tüte 1,60 DM kostet, kosten die Gummibärchen in einem Paket zusammengenommen $50 \cdot 1{,}60\ \text{DM} = 80\ \text{DM}$.

(b) Da 1000 Gramm Gummibärchen 2000 Pfennig kosten, kostet 1 Gramm 2 Pfennig. Also kosten 80 Gramm 1,60 DM. Das ist der Preis für den Inhalt einer Tüte; dieser Inhalt wiegt also 80 Gramm.

(c) Da die 50 Tüten in einem Paket 1000 Gummibärchen enthalten, enthält wegen $1000 : 50 = 20$ eine Tüte 20 Gummibärchen. Da diese, wie in (b) gefunden, 80 Gramm wiegen, wiegt ein Gummibärchen $80\ \text{g} : 20 = 4\ \text{g}$.

340532 Lösung: 10 Punkte

(a) Man benötigt (1) genau $(3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 =)$ 24 Stäbchen,

(2) genau $(4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 =)$ 40 Stäbchen.

(b) Für dieses Quadratgitter aus $100 \cdot 100$ kleinen Quadraten benötigt man (in jeder waagerechten Reihe 101 senkrechte Stäbchen, in allen waagerechten Reihen zusammen also $100 \cdot 101$ senkrechte Stäbchen; ebenso viele waagerechte Stäbchen in allen senkrechten Reihen; insgesamt also)[1] genau. $(100 \cdot 101 + 100 \cdot 101 =)$ 20200 Stäbchen.

---

[1] Die Angaben in Klammern ( ) deuten Überlegungen an, deren Wiedergabe laut Aufgabentext nicht vom Schüler verlangt war. Man kann durch solche Überlegungen auch zu der allgemeinen Aussage kommen, daß man für ein Quadrat aus $n \cdot n$ kleinen Quadraten genau $2 \cdot n \cdot (n+1)$ Stäbchen benötigt.

340533 Lösung: 11 Punkte

I. Da Bernds zweite und dritte Aussage einander gleichwertig sind, sind sie entweder beide wahr oder beide falsch. Nach den Regeln können sie nicht beide falsch sein, also sind sie beide wahr. Also hat Bernd den Brief nicht.
Wenn auch Bernds erste Aussage wahr ist, so folgt daher weiter: Dieter hat den Brief.
Wenn aber Bernds erste Aussage falsch ist, so folgt: Christianes zweite Aussage ist falsch. Nach den Regeln müssen also Christianes erste und dritte Aussage wahr sein. Aus der ersten Aussage und daraus, daß Bernd den Brief nicht hat, folgt damit wieder: Dieter hat den Brief. (Variante: Man kann die Annahme, daß Bernds erste Aussage falsch wäre, wegen der eben erhaltenen Folgerung zu dem Widerspruch führen, daß Bernds erste Aussage sich dann doch als wahr erwiese. Diese Annahme scheidet damit aus.)
Damit hat sich insgesamt ergeben: Wenn alle Aussagen den Regeln entsprechen, so kann eindeutig nur Dieter den Brief haben.

II. Wenn Dieter den Brief hat, so haben Bernd, Christiane und Dieter je drei wahre Aussagen gemacht, und mindestens die ersten beiden Aussagen von Annette sind wahr. Also entsprechen dann alle Aussagen den Regeln.

2.Lösungsweg, 1.Variante:
Die folgende Tabelle zeigt für alle vier Versteckmöglichkeiten, welche Aussagen wahr und welche falsch sind:

Versteck	A1	A2	A3	B1	B2	B3	C1	C2	C3	D1	D2	D3
A	F	W	?	F	W	W	F	F	F	F	F	F
B	W	W	?	W	F	F	W	F	W	F	F	F
C	W	W	?	F	W	W	F	F	W	W	F	F
D	W	W	?	W	W	W	W	W	W	W	W	W

Daraus ist ersichtlich: Es gibt ein Versteck, so daß alle Aussagen den Regeln entsprechen, und dieses Versteck ist auch eindeutig bestimmt; denn in der Zeile D und nur in dieser enthält jede der vier Dreiergruppen mindestens zwei W.

Bemerkung: Die Tabelle enthält Feststellungen, die für die geforderten Untersuchungen nicht herangezogen werden müssen. So genügt z.B. die folgende (nur einige Feststellungen der Tabelle benutzende)

2.Variante: I. Hätte Annette oder Bernd oder Christiane den Brief, so hätte Dieter (mindestens) zwei falsche Aussagen gemacht (siehe in den Zeilen A, B, C die Dreiergruppe D1,D2,D3). Also kann nur Dieter den Brief haben.
II. Wie im 1.Lösungsweg (siehe alle Dreiergruppen in der Zeile D).

Hinweis: Man beachte, daß jede „Wenn - dann"-Aussage mit falschem „Wenn"-Teil wahr ist (Aussage B1 in Zeile B und Aussage D1 in Zeile D).

340534 Lösung: 10 Punkte

Multipliziert man die Anzahl der Anfänger mit der um 1 kleineren Zahl, so erhält man die Anzahl aller von diesen Spielern gespielten Partien. Entsprechendes gilt für die von den Fortgeschrittenen gespielten Partien.

(Zum Beweis[2)] kann man z.B. annehmen, daß für je zwei der betreffenden Spieler die beiden Partien so festgelegt werden, daß jeder der beiden einmal die weißen Steine bekommt. Dann kann man für jeden Spieler alle diejenigen Partien abzählen, die er insgesamt mit den weißen Steinen spielt. Einerseits hat man damit für jeden Spieler als Beitrag zu der so errechneten Zahl gerade die um 1 verringerte Anzahl der Spieler genommen; andererseits hat man insgesamt jede Partie genau einmal erfaßt.)

Die folgende Tabelle zeigt, welche Anzahlen von Partien so zustandekommen können:

Anzahl der Spieler (Anfänger od.Fortgeschr.)	2	3	4	5	6	7	8	9	≥ 10
ahl der Partien	$2 \cdot 1 = 2$	$3 \cdot 2 = 6$	$4 \cdot 3 = 12$	$5 \cdot 4 = 20$	$6 \cdot 5 = 30$	$7 \cdot 6 = 42$	$8 \cdot 7 = 56$	$9 \cdot 8 = 72$	$\geq 10 \cdot 9 = 90$

Da genau $28 \cdot 3 = 84$ Partien gespielt wurden, muß 84 als Summe von zwei der hier aufgezählten Anzahlen darstellbar sein; dabei müssen diese beiden Summanden (wegen der unterschiedlichen Spielerzahlen) voneinander verschieden sein. Die einzige Möglichkeit hierfür ist, 84 als Summe von 12 und 72 darzustellen, das sind die Anzahlen der Partien für 4 bzw. 9 Spieler. Da mehr Anfänger als Fortgeschrittene teilnahmen, ist folglich eindeutig bestimmt: Es nahmen genau 9 Anfänger und genau 4 Fortgeschrittene teil.

---

2) Eine so ausgearbeitete Beweisführung soll nicht vom Schüler verlangt werden; vielmehr ist als ausreichend zu akzeptieren, wenn aus der Darstellung ersichtlich hervorgeht, wie die Partienzahlen gefunden werden können. Möglich ist es z.B. auch, die Partienzahlen mit der in der folgenden Tabelle gezeigten Vorgehensweise zu finden:

2	$2+2\cdot 2 = 6$	$6+2\cdot 3 = 12$	$12+2\cdot 4 = 20$	$20+2\cdot 5 = 30$	$30+2\cdot 6 = 42$	$42+2\cdot 7 = 56$	$56+2\cdot 8 = 72$	$72+2\cdot 9 = 90$

Sie begründet sich in der Tatsache, daß jeweils ein neu hinzukommender Spieler die Partienzahl um das Doppelte der bisherigen Spielerzahl vergrößert.

Vorschläge zur Punktverteilung

340531
(a) Preis des Pakets 2
(b) Gewicht eines Tüteninhalts 4
(c) Gewicht eines Gummibärchens 3
9

340532
(a) Stäbchenzahl 24 3
(b) Stäbchenzahl 40 3
(c) Stäbchenzahl 20200 4
10

340533
I. Eine erste weiter verwendbare Aussage (z.B.: Bernd hat den Brief nicht)........ 3
Nutzung für einen weiteren Schluß (z.B.: Wenn Bernds erste Aussage wahr ist, hat Dieter den Brief) 3
(Bei anderem Lösungsweg z.B.: Die Ermittlung der Wahrheitswerte in der Tabelle ist etwa mit diesen 6 Punkten zu bewerten.)
Abschließende Herleitung der Aussage: Dieter hat den Brief........ 2

II. „Probe“ (Nachweis, daß dann die Aussagen den Regeln entsprechen)

(Bei anderer Lösungsdarstellung kann dieser Nachweis in anderem Zusammenhang mit erbracht sein) 3

11

340534

Ersichtlich richtig gefundene,

weiter verwendbare Darstellung der Abhängigkeit der Partienzahl von der Spielerzah.... 4

Ermittlung derjenigen Partienzahlen, die zur geforderten additiven Zerlegung von 84 geeignet sind 3

Abschließende Herleitung der beiden Spielerzahlen 9 und 4.. 3

10