33. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe
Aufgaben
Olympiadeklassen 11 bis 13
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

331341

Man untersuche für jede der beiden unten genannten Aussagen a) und b), ob diese Aussage für jede Menge wahr ist, in der sich genau 32 positive ganze Zahlen befinden, von denen jede kleiner als 112 ist und von denen keine zwei einander gleich sind:

a) Es gibt eine Zahl, die unter den Differenzen von je zwei dieser Zahlen mindestens fünfmal vorkommt.

b) Es gibt eine Zahl, die unter den Differenzen von je zwei dieser Zahlen mindestens sechsmal vorkommt.

Hinweis: In dieser Aufgabe sei als „Differenz" zweier Zahlen x, y stets die Zahl $|x - y|$ verstanden. Sind x, y Zahlen einer obengenannten Menge, so werde diese Differenz unter allen zu berücksichtigenden nur einmal gezählt (nicht etwa zweimal, als $|x - y|$ und als $|y - x|$).

331342

Für $n = 1,2,3,\ldots$ sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$,

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot s_k^2} = \frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{2\cdot s_2^2} + \frac{1}{3\cdot s_3^2} + \cdots + \frac{1}{n\cdot s_n^2}.$$

Man beweise für alle $n = 1,2,3,\ldots$ die Ungleichung $t_n < 2$.

331343

Es sei ABCDS eine gerade vierseitige Pyramide mit der Spitze S und der quadratischen Grundfläche ABCD. Ferner seien A',B',C',D' vier Punkte, die jeweils auf den Seitenkanten AS, BS, CS bzw. DS liegen und von S beliebig gegebene (von Null verschiedene) Abstände a, b, c bzw. d haben.

Man zeige, daß unter diesen Voraussetzungen stets gilt: Die Punkte A',B',C',D' liegen genau dann in einer gemeinsamen Ebene, wenn

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$$

gilt.

33. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe
Aufgaben
Olympiadeklassen 11 bis 13
2. Tag

331344

Für jedes Dreieck ABC sei D bzw. E jeweils der Schnittpunkt der von A bzw. von B ausgehenden Winkelhalbierenden mit der Gegenseite BC bzw. AC; ferner sei P ein beliebiger Punkt der Strecke DE.
Man beweise: Unter diesen Voraussetzungen ist stets die Summe der Abstände des Punktes P zu den Geraden durch B,C bzw. durch A,C gleich dem Abstand des Punktes P zur Geraden durch A,B.

331345

Im Zwergenland wohnen 12 Zwerge. Jeder von ihnen hat unter den 11 anderen eine ungerade Anzahl von Freunden; alle diese Freundschaften beruhen auf Gegenseitigkeit. In jedem Monat hat einer der 12 Zwerge Geburtstag. Jeder Zwerg bewohnt ein Haus für sich allein, jedes Haus ist entweder rot oder grün gestrichen. Jeder Zwerg streicht in jedem Jahr an seinem Geburtstag sein Haus in derjenigen Farbe, die unter den Farben der Häuser seiner Freunde in größerer Anzahl als die andere Farbe vorkommt.
Zeigen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets ein Zeitpunkt existieren muß, von dem ab die Farbe aller Häuser unverändert bleibt!

Von den nachstehenden Aufgaben 331346A *und* 331346B *ist genau eine auszuwählen und zu lösen:*

331346A

Für alle positiven ganzen Zahlen n werde definiert:

$$f(n) = \left[2\sqrt{n}\right] - \left[\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right].$$

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, für die

a) $f(n) = 1$,

b) $f(n) = 0$

gilt.

Hinweis: Ist r eine reelle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq r < g+1$ gilt, mit $g = [r]$ bezeichnet.

331346B

Man ermittle alle diejenigen Paare (m;n) ganzer, nicht negativer Zahlen m, n, für die $2^m - 5^n = 7$ gilt.

33. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe
Lösungen
Olympiadeklassen 11 bis 13
1. Tag

331341 Lösung: 7 Punkte

a) Für jede Menge aus genau 32 Zahlen gilt: Es gibt insgesamt $\frac{32 \cdot 31}{2} = 496$ Differenzen von je zwei dieser Zahlen. Sind ferner die 32 Zahlen sämtlich positiv ganzzahlig, kleiner als 112 und sind keine zwei von ihnen einander gleich, so ist jede Differenz eine der Zahlen 1, 2, ..., 111 . Käme jeder dieser Werte höchstens viermal unter den Differenzen vor, so führte das auf den Widerspruch, daß es höchstens $4 \cdot 111 < 496$ Differenzen gäbe. Die Aussage a) ist damit für jede Menge der vorausgesetzten Art als wahr nachgewiesen.

b) Für jede Menge der vorausgesetzten Art lassen sich ihre 32 Zahlen a_n ohne Beschränkung der Allgemeinheit so bezeichnen, daß

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{31} < a_{32} < 112 \tag{1}$$

gilt. Käme unter den Differenzen jeder Wert höchstens fünfmal vor, so käme speziell unter den 31 Differenzen $d_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1,\ldots,31)$ jeder der Werte 1,2,3,4,5,6 höchstens fünfmal vor, und es folgte der Reihe nach: Es müßte $31-5 = 26$ der d_n geben, für die $d_n \geq 2$ gilt; unter ihnen müßte es $26-5 = 21$ geben, für die $d_n \geq 3$ gilt; unter diesen 16 mit $d_n \geq 4$; unter diesen 11 mit $d_n \geq 5$; unter diesen 6 mit $d_n \geq 6$; unter diesen eine mit $d_n \geq 7$. Die restlichen $31-26 = 5$ der d_n müßten $d_n \geq 1$ erfüllen. Für die Summe aller d_n ergäbe sich damit

$$d_1 + \cdots + d_{31} \geq 5 \cdot 2 + \cdots + 5 \cdot 6 + 7 + 5 \cdot 1 = 112 .$$

Wegen $a_{32} = a_1 + d_1 + \cdots + d_{31}$ widerspricht diese Ungleichung der Voraussetzung $a_{32} < 112$.

Damit ist auch die Aussage b) für jede Menge der vorausgesetzten Art als wahr nachgewiesen.

Bemerkung: Natürlich ist es auch möglich, sogleich b) zu beweisen und daraus unmittelbar auf a) zu schließen.

331342 Lösung: 6 Punkte

Für $k = 2,3,4,\ldots$ gilt $0 < s_{k-1} < s_k$. Hieraus sowie aus der Definition der s_k folgt

$$\frac{1}{k\cdot s_k^2} < \frac{\frac{1}{k}}{s_k\cdot s_{k-1}} = \frac{s_k - s_{k-1}}{s_k\cdot s_{k-1}} = \frac{1}{s_{k-1}} - \frac{1}{s_k} .$$

Für alle $n = 1,2,3,\ldots$ gilt daher

$$t_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\cdot s_k^2} < 1 + \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right) + \left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_n} = 2 - \frac{1}{s_n} < 2 , \quad \text{w.z.b.w.}$$

331343 Lösung: 7 Punkte

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS} = 1 . \qquad (1)$$

Für die Lote A'F', AF von A' bzw. A auf die Ebene durch B, C, S gilt $A'F' \parallel AF$, nach dem Strahlensatz also $\overline{A'F'}:\overline{AF} = \overline{A'S}:\overline{AS} = a$. Für die Volumina der Pyramiden A'BCS und ABCS gilt daher

$$V(A'BCS):V(ABCS) = a .$$

Entsprechend folgt $\quad V(A'B'CS):V(A'BCS) = b$

und $\quad V(A'B'C'S):V(A'B'CS) = c$.

Damit gilt $\quad V(A'B'C'S):V(ABCS) = abc , \qquad (2)$

und analog ergibt sich $\quad V(A'D'C'S):V(ADCS) = adc , \qquad (3)$

$$V(A'B'D'S):V(ABDS) = abd , \qquad (4)$$

$$V(C'B'D'S):V(CBDS) = cbd . \qquad (5)$$

Die vier Punkte A',B',C',D' liegen genau dann in einer gemeinsamen Ebene, wenn $V(A'B'C'D') = 0$ gilt. Hierfür ist

$$V(A'B'C'S) + V(A'D'C'S) = V(A'B'D'S) + V(C'B'D'S) \qquad (6)$$

notwendig und hinreichend, da die Differenz zwischen den beiden Seiten in (6) den Betrag $V(A'B'C'D')$ hat. Nach (2),(3),(4),(5) und da die Teildreiecke ABC, ADC, ABD, CBD des Quadrates ABCD alle denselben Flächeninhalt haben, also $V(ABCS) = VADCS) = V(ABDS) = V(CBDS)$ gilt, ist (6) gleichbedeutend mit

$$abc + adc = abd + cbd , \qquad (7)$$

dies wegen $a,b,c,d \neq 0$ mit $\frac{1}{d} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}$.

Als <u>anderer Lösungsweg</u> ist natürlich ein Vorgehen mit Koordinaten möglich: Man kann etwa ein Koordinatensystem so legen, daß A,B,C,D bzw. S mit geeigneten $t,h \neq 0$ die Koordinaten $(-t,-t,h)$, $(t,-t,h)$, (t,t,h), $(-t,t,h)$ bzw. $(0,0,0)$ haben; dabei kann auch (1) erreicht werden. Dann haben A', B', C', D' die Koordinaten $(-at,-at,ah)$, $(bt,-bt,bh)$, (ct,ct,ch), $(-dt,dt,dh)$. Für ihre Komplanarität ist

$$\begin{vmatrix} 1 & -at & -at & ah \\ 1 & bt & -bt & bh \\ 1 & ct & ct & ch \\ 1 & -dt & dt & dh \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

notwendig und hinreichend (dies kann als bekannter Sachverhalt zitiert oder auf andere Bedingungen zurückgeführt werden, z.B. auf $V(A'B'C'D') = 0$ oder auf die Existenz einer von A', B', C' und D' erfüllten Gleichung $ux + vy + wz + s = 0$ mit $(u,v,w) \neq (0,0,0)$). Die Determinante in (8) ist $4t^2h\cdot(bcd - acd + abd - abc)$, so daß (8) auf (7) führt.

<u>Vorschläge zur Punktverteilung:</u>

<u>331341</u>

a) Beweis, daß mindestens 5 gleiche Differenzen vorkommen 2

b) Weiter verwendbare Aussage, z.B.
   je 5 Differenzen $\geq 2,3,4,5,6$ unter den $a_{n+1} - a_n$ 3
   Abschließende Gewinnung der Aussage, daß mindestens 6 gleiche Differenzen vorkommen 2

Falls sogleich b) gezeigt wird und daraus unmittelbar auf a) geschlossen wird, werden die 2 Pkte. aus a) auf die Teilbewertungen zu b) verteilt.

7

<u>331342</u>

Geeignete Vorbereitung, z.B. Abschätzung von $1/\left(k\cdot s_k^2\right)$ 3

Abschließender Nachweis von $t_n < 2$ 3

6

<u>331343</u>

Erste nutzbare Teilaussage (z.B. (2) oder Koordinaten für A,B,C,D,S,A',B',C',D') 4

Abschließende Beweisführung 3

7

33. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe
Lösungen
Olympiadeklassen 11 bis 13
2. Tag

331344 Lösung: 7 Punkte

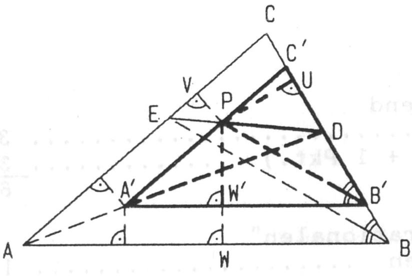

Abb. L 331344

Die Lote von P auf die Geraden durch B,C, durch A,C und durch A,B seien PU, PV bzw. PW. Die Parallele durch P zu AC schneide BC in C' und AD in A'; die Parallele durch A' zu AB schneide PW in W' und BC in B'. Dann wird ∡ A'B'C' von B'P halbiert, da[1] außer A'B' ∥ AB nach dem Strahlensatz und seiner Umkehrung $\overline{DP}:\overline{DE} = \overline{DA'}:\overline{DA} = \overline{DB'}:\overline{DB}$, also auch B'P∥BE gilt. Nach dem Satz, daß jeder Punkt der Winkelhalbierenden gleichgroße Abstände zu den beiden Schenkeln des halbierten Winkels hat, folgt

$$\overline{PU} = \overline{PW'}. \tag{1}$$

Ferner hat nach diesem Satz A' gleichgroße Abstände zu den Geraden durch A,C und durch A,B; wegen A'P ∥ AC und A'W' ∥ AB besagt dies auch

$$\overline{PV} = \overline{W'W}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $\overline{PU} + \overline{PV} = \overline{PW'} + \overline{W'W} = \overline{PW}$, w.z.b.w.

331345 Lösung: 6 Punkte

Für jedes n = 0,1,2,... sei f(n) die Anzahl derjenigen befreundeten Zwerg-Paare, deren beide Häuser nach n Monaten voneinander verschiedene Farbe haben. Für jedes n = 1,2,3,... gilt: Es ist nur dann f(n) ≠ f(n-1), wenn der Zwerg, der im n-ten Monat sein Haus streicht, dabei dessen Farbe wechselt. Das geschieht dann deswegen, weil er zu diesem Zeitpunkt beim Vergleich mit der Farbe seines Hauses mehr Freunde mit andersfarbigem als mit gleichfarbigem Haus hat. Daher wird in jedem solchen Fall der Wert f(n-1) verkleinert (nämlich um die Differenz der beiden Farb-Anzahlen). Daher und weil alle f(n) ganze Zahlen mit f(n) ≥ 0 sind, kommt dieser Fall höchstens für endlich viele n vor; d.h., es existiert ein Zeitpunkt, von dem ab die Farbe aller Häuser unverändert bleibt.

---

[1] auch zu erhalten, weil A'B'C' durch Streckung in ABC übergeht.

<u>331346 A Lösung:</u> 7 Punkte

Es gilt $f(1) = [2] - \left[0 + \sqrt{2}\right] = 2-1 = 1$. Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ gilt

$$5 < 4n ,$$
$$4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 4 < 4n^2 ,$$
$$2n - 1 < 2\sqrt{n^2 - 1} < 2n ,$$
$$4n - 1 < \left(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right)^2 < 4n . \tag{1}$$

Gäbe es nun eine ganze Zahl g mit $\sqrt{4n - 1} < g \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$, so folgte $4n - 1 < g^2 \leq \left(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right)^2$; dies widerspricht (1), da zwischen $4n - 1$ und $4n$ nicht die ganze Zahl g^2 liegen kann. Damit ist gezeigt:

$$\left[\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n - 1}\right] , \tag{2}$$
$$f(n) = \left[\sqrt{4n}\right] - \left[\sqrt{4n - 1}\right] . \tag{3}$$

Weiter gilt:

I. Ist n eine Quadratzahl, so ist $\sqrt{4n}$ eine ganze Zahl. Für sie gilt

$$2 \leq 2\sqrt{4n} ,$$
$$4n - 2\sqrt{4n} + 1 \leq 4n - 1 ,$$
$$\sqrt{4n} - 1 \leq \sqrt{4n - 1} < \sqrt{4n} ,$$

d.h. $$\left[\sqrt{4n - 1}\right] = \sqrt{4n} - 1 = \left[\sqrt{4n}\right] - 1 ,$$

nach (3) also $f(n) = 1$.

II. Ist n keine Quadratzahl, so kann es keine ganze Zahl g mit $4n - 1 < g^2 \leq 4n$, d.h. $\sqrt{4n - 1} < g \leq \sqrt{4n}$, geben, also gilt dann $\left[\sqrt{4n}\right] = \left[\sqrt{4n - 1}\right]$, nach (3) also $f(n) = 0$.

Damit ist bewiesen: Unter allen positiven ganzen Zahlen n erfüllen

a) genau alle positiven Quadratzahlen n die Bedingung $f(n) = 1$;

b) für alle anderen positiven ganzen n gilt $f(n) = 0$.

Es gibt auch <u>andere Lösungsmöglichkeiten</u>, bei denen man mit etwas mehr Aufwand ohne den Übergang zu (2) auszukommt. So kann man, unmittelbar an den Möglichkeiten für $\left[2\sqrt{n}\right]$ orientiert, eine Fallunterscheidung einführen und dann jeweils $\left[\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right]$ ermitteln:

Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ liegt einer der folgenden Fälle vor:

(A) Mit ganzzahligem $m \geq 2$ gilt $n = m^2$.

(B) " " $m \geq 1$ " $m^2 < n < \left(m + \frac{1}{2}\right)^2$.

(C) " " $m \geq 1$ " $\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 < n < (m + 1)^2$.

Im <u>Fall (A)</u> gilt $\left[2\sqrt{n}\right] = 2m$. Man beweist $2m-1 \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} < 2m$ (woraus dann $\left[\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right] = 2m-1$, also $f(n) = 1$ folgt): Wegen der - auch in den weiteren Fällen verwendeten - Gleichung

$$\left(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right)^2 = 2n + 2\sqrt{n^2 - 1} \tag{4}$$

ist zu zeigen: $\qquad 4m^2 - 4m + 1 \leq 2m^2 + 2\sqrt{m^4 - 1} < 4m^2$,

d.h. $\qquad m^2 - 2m + \frac{1}{2} \leq \sqrt{m^4 - 1} < m^2$.

Die rechte Ungleichung ist klar, die linke folgt, wenn $m^4 - 4m^3 + 5m^2 - 2m + \frac{1}{4} \leq m^4 - 1$, d.h. $5m^2 + \frac{5}{4} \leq 4m^3 + 2m$ gezeigt ist, und dies gilt, da wegen $2 \leq m$ sogar $8m^2 + 4 \leq 4m^3 + 2m$ ist.

Im <u>Fall (B)</u> gilt $2m < 2\sqrt{n} < 2m+1$, also $\left[2\sqrt{n}\right] = 2m$. Ferner ist $n = m^2 + k$ mit einer ganzen Zahl k, für die $0 < k < m + \frac{1}{4}$, also $1 \leq k \leq m$ gilt. Damit beweist man $2m \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} < 2m+1$ (und folglich $f(n) = 0$): Zu zeigen sind wegen (4) die Ungleichungen

$$4m^2 \leq 2m^2 + 2k + 2\sqrt{\left(m^2 + k\right)^2 - 1} < 4m^2 + 4m + 1.$$

Die linke folgt wegen $1 \leq k$, wenn $2m^2 \leq 2 + 2\sqrt{\left(m^2 + 1\right)^2 - 1}$ gezeigt ist; dies erhält man aus $\left(m^2 - 1\right)^2 \leq \left(m^2 + 1\right)^2 - 1$, d.h. $1 \leq 4m^2$; die rechte Ungleichung folgt wegen $k \leq m$ aus $2\sqrt{\left(m^2 + m\right)^2 - 1} < 2\left(m^2 + m\right) + 1$.

Im <u>Fall (C)</u> gilt $\left[2\sqrt{n}\right] = 2m + 1$. Ferner ist $n = m^2 + k$ (k ganzzahlig mit $m+1 \leq k \leq 2m$). Man beweist $2m+1 \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} < 2m+2$ (also $f(n) = 0$): Zu zeigen ist wegen (4)

$$4m^2 + 4m + 1 \leq 2m^2 + 2k + 2\sqrt{\left(m^2 + k\right)^2 - 1} < 4m^2 + 8m + 4.$$

Wegen $m+1 \leq k$ folgt die linke Ungleichung aus

$2m^2 + 2m \leq 1 + 2\sqrt{\left(m^2 + m+1\right)^2 - 1}$ (was mit $m^2 + m < \sqrt{\left(m^2 + m+1\right)^2 - 1}$ gezeigt werden kann); die rechte Ungleichung folgt wegen $k \leq 2m$ aus $\sqrt{\left(m^2 + 2m\right)^2 - 1} < m^2 + 2m + 2$.

<u>331346 B Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Unter den Zahlen 2^m für ganzzahlige $m \leq 5$ sind genau die beiden Zahlen 2^3 und 2^5 von der Form $5^n + 7$ mit ganzzahligem $n \geq 0$, nämlich $2^3 = 5^0 + 7$ und $2^5 = 5^2 + 7$.

Gäbe es ganzzahlige m, n mit ($n \geq 0$ und) $m \geq 6$, für die $5^n + 7 = 2^m$ ist, so wäre $5^n + 7$ durch 64 teilbar, also müßte 5^n bei Division durch 64 den Rest 57 lassen. Man hat aber folgende sich periodisch wiederholende Reste:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
5^n mod 64	1	5	25	61	49	53	9	45	33	37	<u>57</u>	29	17	21	41	13	1	...

Daher müßte $n = 16a + 10$ mit ganzzahligem a sein. Betrachtet man nun die Reste, die sich bei Division durch 17 ergeben, so findet man, ebenfalls jeweils in periodischer Wiederholung:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	<u>10</u>	11	12	13	14	15	16	...
5^n mod 17	1	5	8	6	13	14	2	10	16	12	9	11	4	3	15	7	1	...
5^n+7 mod 17	8	12	15	13	3	4	9	0	6	2	<u>16</u>	1	11	10	5	14	8	...

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
2^m mod 17	1	2	4	8	<u>16</u>	15	13	9	1	...

Für $n = 16a + 10$ wäre hiernach $5^n + 7 = 2^m$ nur möglich, wenn $m = 8b + 4$ mit ganzzahligem b wäre. Mit den geraden $n = 16a + 10$ und $m = 8b + 4$ kann aber $2^m - 5^n = 7$ nicht gelten; denn für alle $m = 2h$, $n = 2k$ (h,k > 0 ganzzahlig) gilt: Bei Division durch 3 lassen $2^m = 4^h$ und $5^n = 25^k$ ebenso wie 4 bzw. 25 den Rest 1 , also ist $2^m - 5^n$ durch 3 teilbar und folglich von 7 verschieden.

Damit ist gezeigt, daß genau die Paare (3;0) und (5;2) die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

<u>Vorschläge zur Punktverteilung:</u>

<u>331344</u>

Einführung geeigneter Hilfsmittel, z.B.
der Punkte A',B',C',W' 2
Wesentlicher Teilnachweis, z.B. B'P∥BE und damit (1) 3
Abschließende Beweisführung 2
7

<u>331345</u>

Nutzbarer Beweisteil, z.B. Diskussion des Farbwechsels 3
Schluß auf Existenz eines Zeitpunktes,
von dem ab die Farbe aller Häuser unverändert bleibt 3
6

<u>331346 A</u>

Nachweis von f(n) = 1 für alle Quadratzahlen n 4
" " f(n) = 0 für alle anderen n 3
7

<u>331346 B</u>

Erster wesentlicher Teilbeweis (z.B. n ≡ 0 mod 16) 3
Abschließender Beweis (Widerlegung von m ≥ 5) 4
7