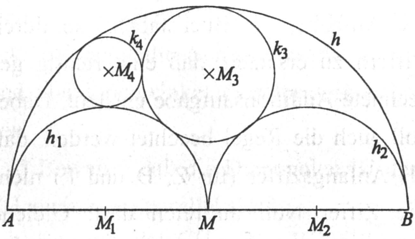
Olympiadeklasse 11 bis 13 - 1. Tag

331331

Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c, d die nachstehende Ungleichung (1) gilt!

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\leq\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}. \qquad (1)$$

331332



Über eine Strecke AB sei ein Halbkreis h mit dem Mittelpunkt M errichtet. Darin (siehe Abbildung) seien die Halbkreise h_1 und h_2 über AM bzw. MB konstruiert. Ferner sei k_3 derjenige Kreis, der h von innen sowie h_1 und h_2 von außen berührt, und es sei k_4 derjenige Kreis, der h von innen sowie h_1 und k_3 von außen berührt.

Man beweise, daß M und die Mittelpunkte M_3, M_4, M_1 von k_3, k_4 bzw. h_1 die Ecken eines Rechteckes sind.

Von den nachstehenden Aufgaben 331333 A und 331333 B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

331333 A

Ist m eine natürliche Zahl mit $m \geq 2$, so werde eine Zahlenfolge $(x_n)_{n = 0, 1, 2, \ldots}$ durch die Festsetzungen definiert, daß $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ gelten soll und für $n \geq 0$ jeweils x_{n+2} der Rest (mit $0 \leq x_{n+2} < m$) sein soll, den $x_{n+1} + x_n$ bei Division durch m läßt.

Man untersuche, ob zu jeder natürlichen Zahl $m \geq 2$ eine natürliche Zahl $k \geq 1$ existiert, mit der die drei Gleichungen $x_0 = x_k$, $x_1 = x_{k+1}$ und $x_2 = x_{k+2}$ gelten.

331333 B

Für jede ganze Zahl n mit $n \geq 0$ sei f_n die durch

$$f_n(x) = x^3 + (n+3)\cdot x^2 + 2n\cdot x - \frac{n}{n+1}$$

für alle reellen x definierte Funktion.

Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen $n \geq 0$, für die gilt: Alle Nullstellen von f_n liegen in einem Intervall der Länge 3.

2. Tag

331334

Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Paare $(x\ ;\ y)$ ganzer Zahlen x, y, für die $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1993$ gilt.

331335

Zwei kongruente regelmäßige 2n-Ecke seien durch Verbinden ihrer Eckpunkte mit dem jeweiligen Mittelpunkt in Dreiecke zerlegt. Jedes dieser Dreiecke sei entweder blau oder rot gefärbt. Von einem der beiden 2n-Ecke werde vorausgesetzt, daß es ebenso viele blaue wie rote Dreiecke hat.

Man beweise: Unter diesen Voraussetzungen ist es stets möglich, die beiden 2n-Ecke so aufeinanderzulegen, daß in mindestens n übereinanderliegenden Dreieckspaaren die beiden Dreiecke dieses Paares einander gleichgefärbt sind.

331336

Man ermittle für jede natürliche Zahl n die größte Zweierpotenz, die ein Teiler der Zahl $\left[\left(4+\sqrt{18}\right)^n\right]$ ist.

Hinweis: Ist r eine relle Zahl, so wird diejenige ganze Zahl g, für die $g \leq r < g+1$ gilt, mit $g = [\, r \,]$ bezeichnet.

33. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe
Lösungen
Olympiadeklassen 11 bis 13
1. Tag

331331 Lösung: 6 Punkte

I. Für alle reellen a,b,c,d gilt $0 \leq (ad - bc)^2$, (2)

also $2abcd \leq a^2d^2 + b^2c^2$. (3)

Durch Addition von

$$ab(c^2+d^2) + cd(a^2+2ab+b^2) = a^2cd+abd^2+abc^2+b^2cd+2abcd$$

folgt $$ab(c+d)^2 + cd(a+b)^2 \leq (ad+bc)\cdot(ac+ad+bc+bd). \quad (4)$$

Weitere Addition von $(ab + cd)\cdot(a+b)(c+d)$ ergibt

$$ab(c+d)(a+b+c+d)+cd(a+b)(a+b+c+d) \leq (a+c)(b+d)\cdot(a+b)(c+d). \quad (5)$$

Wegen $a,b,c,d > 0$ folgt nach Division durch $(a+b)(c+d)(a+b+c+d)$

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} \leq \frac{(a+c)(b+d)}{a+c + b+d} \quad (6)$$

und damit die zu beweisende Ungleichung (1).

Bemerkungen: 1. Man kann Formeln der obengenannten Art in umgekehrter Reihenfolge schreiben; dies entspricht dem Auffinden solcher Formeln. Bei der Wahl einer derartigen Darstellung entsteht nur dann eine (mit voller Punktzahl zu bewertende, weil) korrekte Lösung, wenn die erforderliche *logische Schlußrichtung* (für die obigen Formeln in der Reihenfolge (2) $\rightarrow \cdots \rightarrow$ (5) $\rightarrow$ (6) $\rightarrow$ (1)) *aus der Darstellung hervorgeht*.
2. Eine andere Möglichkeit, die heuristisch bedingte mit der logisch erforderlichen Reihenfolge in Einklang zu bringen, bietet die indirekte Beweisführung (obwohl sie beweistechnisch eigentlich eine überflüssige Komplikation bedeutet): Man schließt aus der Annahme, (1) sei falsch, der Reihe nach auf die Negationen von (6),(5),...,(2) und damit auf den Widerspruch $0 > (ad - bc)^2$.

331332 Lösung: 7 Punkte

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\overline{AM_1} = \overline{M_1M} = \overline{MM_2} = \overline{M_2B} = 1$ gesetzt, der Radius von k_3 bzw. k_4 sei x bzw. y.

I. Aus der Kongruenz von h_1 mit h_2 und aus den Berührungsbedingungen für k_3 folgt: Das Dreieck $M_1M_2M_3$ ist mit $\overline{M_1M_3} = \overline{M_2M_3}$ gleichschenklig, die Seitenhalbierende M_3M ist zugleich Höhe, nach dem Satz des Pythagoras gilt $\overline{M_1M}^2 + \overline{MM_3}^2 = \overline{M_1M_3}^2$, $1 + (2-x)^2 = (1+x)^2$. Daraus folgt $5 - 4x + x^2 = 1 + 2x + x^2$, also $x = \frac{2}{3}$.

II. Es sei M_4' derjenige Punkt, für den $M_1MM_3M_4'$ ein Rechteck ist. Für ihn gilt $\overline{M_1M_4'} = \overline{MM_3} = 2 - x = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$, $\overline{M_3M_4'} = \overline{MM_1} = 1 = x + \frac{1}{3}$ und $\overline{MM_4'} = \overline{M_1M_3} = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \frac{5}{3} = 2 - \frac{1}{3}$, also erfüllt der Kreis um M_4' mit dem Radius $\frac{1}{3}$ die Berührungsbedingungen für k_4; somit ist $M_4' = M_4$ und damit $M_1MM_3M_4$ als Rechteck nachgewiesen.

Bemerkung: Im Beweisteil I. wurde die *Existenz* eines Kreises k_3, der die Berührungsbedingungen erfüllt, dem Aufgabentext entnommen, in II. die *Eindeutigkeit* eines solchen Kreises k_4. Der folgende Lösungsweg zeigt, daß man (in I. oder II. oder in beiden Teilen) mit etwas mehr Aufwand auch jeweils die andere Möglichkeit hat:

2. Lösungsweg:

I. Auf der Seite von AB, auf der h liegt, sei M_3' derjenige Punkt, für den $MM_3' \perp M_1M$ und $\overline{MM_3'} = \frac{4}{3} = 2 - \frac{2}{3}$ ist. Für ihn gilt nach dem Satz des Pythagoras $\overline{M_1M_3'} = \overline{M_2M_3'} = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$, also erfüllt der Kreis um M_3' mit dem Radius $\frac{2}{3}$ die Berührungsbedingungen für k_3; somit ist er der Kreis k_3 (und es gilt $M_3' = M_3$.

II. Aus den Berührungsbedingungen für k_4 folgt mit $t = \overline{MM_4}$, daß $y = 2 - t$, $\overline{M_1M_4} = 1 + y = 3 - t$ und $\overline{M_3M_4} = \frac{2}{3} + y = \frac{8}{3} - t$ gilt.

Mit $\alpha = \overline{\measuredangle M_1MM_4}$, $\overline{MM_3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ folgen daher aus dem Kosinussatz die Gleichungen

$$(3-t)^2 = 1 + t^2 - 2\cdot t\cdot\cos\alpha, \tag{1}$$

$$\left(\frac{8}{3} - t\right)^2 = \frac{16}{9} + t^2 - 2\cdot\frac{4}{3}\cdot t\cdot\sin\alpha. \tag{2}$$

Aus (1) ergibt sich $2t\cdot\cos\alpha = 6t - 8$, $\cos\alpha = 3 - \frac{4}{t}$, $\sin\alpha = \sqrt{-8 + \frac{24}{t} - \left(\frac{4}{t}\right)^2} = \frac{2}{t}\cdot\sqrt{-2t^2 + 6t - 4}$ und damit aus (2) weiter $1 - t = -\sqrt{-2t^2 + 6t - 4}$, $3t^2 - 8t + 5 = 0$, $t = \frac{5}{3}$ (die zweite Lösung $t = 1$ scheidet aus, da für sie $\cos\alpha < 0$ wäre). Somit wird $\overline{M_1M_4} = \frac{4}{3} = \overline{MM_3}$ und $\overline{M_3M_4} = 1 = \overline{MM_1}$; daher und wegen $\overline{\measuredangle M_1MM_3} = 90^\circ$ ist $M_1MM_3M_4$ ein Rechteck.

332333 A Lösung: 7 Punkte

Zu jeder natürlichen Zahl $m \geq 2$ existiert eine Zahl k der genannten Art. Beweis:

Jede der Zahlen x_i ist eine der m Zahlen $0, 1, \ldots, m-1$. Also gibt es höchstens m^3 verschiedene Möglichkeiten für die Tripel (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) $(i = 0,1,2,\ldots)$. Daher muß eine dieser Möglichkeiten wiederholt angenommen werden, d.h., es gibt ein $i \geq 0$ und ein $k \geq 1$ mit

$$x_i = x_{k+i}, \quad x_{i+1} = x_{k+i+1}, \quad x_{i+2} = x_{k+i+2}. \tag{1}$$

Ist $i > 0$, so kann man hieraus auf

$$x_{i-1} = x_{k+i-1}$$

schließen; denn[1)] nach Definition von x_{i+1} und x_{k+i+1} gibt es natürliche Zahlen q, q' mit

$$x_i + x_{i-1} = q \cdot m + x_{i+1}, \quad x_{k+i} + x_{k+i-1} = q' \cdot m + x_{k+i+1};$$

subtrahiert man diese Gleichungen voneinander, so folgt wegen (1), daß $x_{k+i-1} - x_{i-1} = (q'-q) \cdot m$ gilt; wegen $0 \leq x_{i-1} < m$ und $0 \leq x_{k+i-1} < m$, also $\left|x_{k+i-1} - x_{i-1}\right| < m$, ist dabei $|q'-q| < 1$, also $q'-q = 0$.

Setzt man dies fort, so kommt man schließlich zu den behaupteten Gleichungen $x_2 = x_{k+2}$, $x_1 = x_{k+1}$, $x_0 = x_k$.

331333 B Lösung: 7 Punkte

I. Für $n = 0$ ist f_n die durch $f_n(x) = x^3 + 3x^2$ definierte Funktion. Sie hat genau die Nullstellen 0 und -3. Diese liegen in dem Intervall $[-3;0]$ der Länge 3.

---

1) Die oben folgende Herleitung kann auch als Rechnen modulo m unter Einschränkung auf das Repräsentantensystem $\{0,\ldots,m-1\}$ formuliert werden.

L 11-13.I

$f(-3) = n\left(3 - \frac{1}{n+1}\right) > 0$!

II. Für jede ganze Zahl $n > 0$ gilt

$$f_n(0) = -\frac{n}{n+1} < 0\,, \qquad f_n(-2) = 4 - \frac{n}{n+1} > 0$$

sowie[1)]

$$f_n(1) = 3n + 4 - \frac{n}{n+1} > 0\,, \quad f_n(-n-3) = -2n(n+3) - \frac{n}{n+1} < 0;$$

daher hat f drei paarweise verschiedene Nullstellen. Sie seien x_1, x_2, x_3 mit $x_1 < x_2 < x_3$. Nach dem Wurzelsatz von Vieta[2)] gilt

$$-(x_1 + x_2 + x_3) = n + 3 \qquad (1)$$

und

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2n\,. \qquad (2)$$

Wegen $x_3 - x_2 > 0$ und $x_2 - x_1 > 0$ gilt ferner

$$(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) > 0\,. \qquad (3)$$

Nun ist

$$(x_3 - x_1)^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1).$$

Aus (1),(2) und (3) folgt daher $(x_3 - x_1)^2 > (n+3)^2 - 6n = n^2 + 9$, hieraus wegen $n > 0$ und $x_3 - x_1 > 0$ weiter $x_3 - x_1 > 3$; d.h., die Nullstellen x_1, x_2, x_3 liegen nicht in einem Intervall der Länge 3.

Damit ist bewiesen: Unter allen ganzen Zahlen $n \geq 0$ erfüllt genau die Zahl $n = 0$ die Bedingung, daß alle Nullstellen von f_n in einem Intervall der Länge 3 liegen.

---

1) Anstelle der oben folgenden Abschätzungen von Funktionswerten kann man sich auch auf $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$ berufen.

2) oder weil mit den Nullstellen x_1, x_2, x_3 und wegen des Koeffizienten 1 bei x^3 die Identität

$$f_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

gilt.

Vorschläge zur Punktverteilung:

331331

Rechnerisch richtige Umformungen	4
(Ersichtlich) logisch richtige Beweisführung	2
	6

331332

Erste verwendbare Teil-Herleitung, etwa wie I.	3
Zweite, abschließende " " " II.	4
	7

331333 A

Erster Beweisteil, z.B. Gewinnung eines Ausgangstripels (1) durch Schubfachschluß	3
Abschließender Beweis (im Beispiel durch schrittweises Zurückschließen)	4
	7

331333 B

Bestätigung der Existenz eines Intervalls der Länge 3 im Fall n = 0	1
Behandlung des Falles n > 0 :	
Geeignete Umformung (z.B. von $(x_3 - x_1)^2$)	3
Schluß auf Nichtexistenz eines Intervalls der Länge 3	3
	7

33. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe
Lösungen
Olympiadeklassen 11 bis 13
2. Tag

331334 Lösung: 6 Punkte

I. Wenn x und y ganze Zahlen sind, für die

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1993 \qquad (1)$$

gilt, so folgt

$$y = (1993 - \sqrt{x})^2 = 1993^2 - 3986\cdot\sqrt{x} + x\,,$$

also ist $\sqrt{x}$ die rationale Zahl $\sqrt{x} = \dfrac{1993^2 + x - y}{3986}$.

Daraus folgt[1]: Mit einer natürlichen Zahl a gilt

$$x = a^2\,. \qquad (2)$$

Ebenso folgt nochmals aus (1): Mit einer natürlichen Zahl b gilt

$$y = b^2\,. \qquad (3)$$

Für diese Zahlen a und b gilt nach (2),(3) einerseits

$$a \geq 0\,,\ b \geq 0\,, \qquad (4)$$

andererseits wegen (1)

$$a + b = 1993\,. \qquad (5)$$

II. Für jedes Paar (a;b) ganzer Zahlen a,b mit $a \geq 0$, $b \geq 0$ und $a + b = 1993$ gilt: Die ganzen Zahlen $x = a^2$, $y = b^2$ erfüllen $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1993$.

Damit ist bewiesen: Es gibt ebenso viele Paare (x;y) ganzer Zahlen mit $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1993$, wie es Paare (a;b) ganzer Zahlen mit $a \geq 0$, $b \geq 0$ und $a + b = 1993$ gibt. Das sind genau die Paare

(0;1993) , (1;1992) ,.., (1993;0) ,

ihre Anzahl beträgt 1994.

331335 Lösung: 7 Punkte

Die 2n-Ecke seien $S = A_1A_2\cdots A_{2n}$ und $T = B_1B_2\cdots B_{2n}$. In einem von ihnen, etwa in S, kommen nach Voraussetzung n blaue und n rote Dreiecke vor. Von den Dreiecken in T seien b blau und r rot gefärbt.

---

[1] Es gilt der Satz: Ist die Quadratwurzel $\sqrt{x}$ aus einer ganzen Zahl x rational, so ist x eine Quadratzahl. Dies kann als bekannter Sachverhalt zitiert oder z.B. so bewiesen werden: Ist $\sqrt{x}$ rational, so gibt es ganze Zahlen $u \geq 0$ und $v > 0$ mit $\sqrt{x} = \frac{u}{v}$, also $v^2\cdot x = u^2$. Wäre x keine Quadratzahl, so stünde auf der linken bzw. rechten Seite dieser Gleichung das Produkt einer ungeraden bzw. geraden Anzahl von Primfaktoren.

Für jedes $k = 1,\dots,2n$ kann das 2n-Eck S ohne Änderung des Umlaufssinnes so mit dem 2n-Eck T zur Deckung gebracht werden, daß A_1 mit B_k zur Deckung kommt. Dabei bezeichne jeweils x_k die Anzahl derjenigen unter den Dreiecken in S, die mit einem Dreieck gleicher Farbe zur Deckung kommen.
Insgesamt bei allen Stellungen von S für $k = 1,\dots,2n$ kommt jedes der n blauen Dreiecke aus S genau b mal mit einem gleichfarbigen Dreieck zur Deckung und jedes der n roten Dreiecke aus S genau r mal. Daher gilt $x_1 + \dots + x_{2n} = b\cdot n + r\cdot n$, wegen $b + r = 2n$ also $x_1 + \dots + x_{2n} = 2n^2$.
Wären alle $x_k < n$, so wäre damit ein Widerspruch erreicht. Also muß mindestens ein $x_k \geq n$ sein, w.z.b.w.

331336 Lösung: 7 Punkte

Für die Zahlen

$$a_n = (4 + \sqrt{18})^n, \quad b_n = (4 - \sqrt{18})^n, \quad c_n = a_n + b_n \quad (n = 0,1,2,\dots)$$

gilt
$$a_{n+2} = a_n(4 + \sqrt{18})^2 = a_n(34 + 8\sqrt{18})$$
$$= 2a_n\left(4\cdot(4 + \sqrt{18}) + 1\right) = 2\cdot(4a_{n+1} + a_n)$$

und entsprechend $\quad b_{n+2} = 2\cdot(4b_{n+1} + b_n)$,

also $\quad c_{n+2} = 2\cdot(4c_{n+1} + c_n) \quad (n = 0,1,2,\dots)$. (1)

Hiermit und mit $c_0 = 2$, $c_1 = 8$ wird nun bewiesen:

Alle c_n sind ganze Zahlen; für sie gilt:

$$\left\{\begin{array}{ll} c_{2k} & \text{ist durch } 2^{k+1}\text{, aber nicht durch } 2^{k+2} \text{ teilbar,} \\ c_{2k+1} & \text{ist durch } 2^{k+3}\text{, aber nicht durch } 2^{k+4} \text{ teilbar} \\ & (k = 0,1,2,\dots). \end{array}\right\} \quad (2)$$

Erstens gilt (2) nämlich für $k = 0$. Wird zweitens vorausgesetzt, daß (2) für ein $k \geq 0$ gilt, so folgt: Mit ungeraden Zahlen s,t ist $c_{2k} = s\cdot 2^{k+1}$, $c_{2k+1} = t\cdot 2^{k+3}$, und nach (1) folgt

$$c_{2k+2} = 2\cdot(4t\cdot 2^{k+3} + s\cdot 2^{k+1}) = 2^{k+2}\cdot(16t + s) ,$$
$$c_{2k+3} = 2\cdot(4\cdot 2^{k+2}(16t+s) + t\cdot 2^{k+3}) = 2^{k+4}\cdot(2(16t+s) + t) ,$$

also (2) für k+1 statt k. Damit ist (2) durch vollständige Induktion bewiesen.

Nun ist $4 < \sqrt{18} < 5$, also $-1 < 4 - \sqrt{18} < 0$; daraus folgt:

Für $n = 2k$ gilt $0 < b_n < 1$, also

$$a_n < c_n < a_n + 1\ , \quad c_n - 1 < a_n < c_n\ , \quad [a_n] = c_n - 1\ ;$$

für $n = 2k+1$ gilt $-1 < b_n < 1$, also

$$a_n - 1 < c_n < a_n\ , \quad c_n < a_n < c_n + 1\ , \quad [a_n] = c_n\ .$$

Hieraus und aus (2) folgt: Die größte Zweierpotenz, die ein Teiler der Zahl $\left[(4 + \sqrt{18})^n\right] = [a_n]$ ist, ist für gerades n die Potenz 2^0 (d.h., $[a_n]$ ist ungerade), für ungerades $n = 2k+1$ die Potenz 2^{k+3} ($= 2^{(n+5)/2}$).

Vorschläge zur Punktverteilung:

331334

Zurückführung auf ganzzahlige Paare mit (4),(5)	4
Abzählen dieser Paare	2
	6

331335

Kennzeichnung eines zum Ziel führenden Beweisprinzips, z.B. Betrachtung verschiedener möglicher Stellungen der 2n-Ecke (Einführung der x_k)	3
Durchführung der Herleitung der Existenz eines k mit $x_k \geq n$	4
	7

331336

Übergang zur Betrachtung der c_n	2
Aussagen (2) über Zweierpotenzen in den c_n	3
Schluß auf die zu findenden Aussagen über Zweierpotenzen in den $[a_n]$	2
	7