Umlauft

A 11-13

33. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe
Aufgaben
Olympiadeklassen 11 bis 13

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

<u>331321</u>

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1),(2) erfüllen!

$$2 - x + y = \sqrt{18 + x - y}\,, \qquad (1)$$
$$\sqrt{1 + x + y} + \sqrt{2 + x - y} = 5\,. \qquad (2)$$

<u>331322</u>

a) Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ die Ungleichung

$$\frac{4^2 - 9}{4^2 - 4} \cdot \frac{5^2 - 9}{5^2 - 4} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2 - 9}{n^2 - 4} > \frac{1}{6}$$

gilt!

b) Kann man die Zahl $\frac{1}{6}$ auf der rechten Seite dieser Ungleichung durch die Zahl 0,1667 ersetzen, ohne daß damit aus der in a) zu beweisenden Aussage eine falsche Aussage entsteht?

<u>331323</u>

Man ermittle alle diejenigen Paare $(m;n)$ positiver ganzer Zahlen m, n, für die $1994^m - 1993^n$ eine Quadratzahl ist.

<u>331324</u>

Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck, C' sei der Bildpunkt von C bei der Spiegelung an AB.

Für jeden Punkt P, der auf AB zwischen A und B liegt, seien Q auf BC und R auf CA so gelegen, daß $PQCR$ ein Parallelogramm ist. Dann sei X der von P verschiedene Schnittpunkt der Umkreise der beiden Dreiecke APR und BPQ.

Man beweise: Die Menge aller so zu erhaltenden Punkte X stimmt überein mit dem ~~in~~ im Innern des Dreiecks ABC gelegenen Bogen des Umkreises des Dreiecks ABC'.

33. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe
Lösungen
Olympiadeklassen 11 bis 13

331321 Lösung:

9 Punkte

I. Wenn ein Paar $(x;y)$ reeller Zahlen das Gleichungssystem (1),(2) erfüllt, so folgt:

Für die Zahlen
$$u = x + y , \tag{3}$$
$$v = x - y \tag{4}$$
gilt
$$2 - v = \sqrt{18 + v} \tag{5}$$
und
$$\sqrt{1 + u} + \sqrt{2 + v} = 5 . \tag{6}$$
Aus (5) folgt
$$2 - v \geq 0 \tag{7}$$
und
$$4 - 4v + v^2 = 18 + v ,$$
$$v^2 - 5v - 14 = 0 ,$$
also ist v eine der Zahlen
$$v_{1;2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 14}$$
$$= \frac{5}{2} \pm \frac{9}{2} ,$$
$$v_1 = 7 , \quad v_2 = - 2 .$$
Von diesen scheidet v_1 wegen (7) aus[1]; d.h., es folgt
$$v = - 2 . \tag{8}$$
Aus (6) folgt damit weiter $\sqrt{1 + u} = 5$, also
$$u = 24 . \tag{9}$$
Schließlich erhält man aus (3), (4), (8) und (9)
$$2x = u + v = 22 ,$$
$$2y = u - v = 26$$
und damit $x = 11$, $y = 13$.

II. Diese Zahlen erfüllen wegen $2 - x + y = 4$, $\sqrt{18 + x - y} = 4$, $\sqrt{1 + x + y} = 5$, $\sqrt{2 + x - y} = 0$ das Gleichungssystwem (1),(2).

Daher wird dieses Gleichungssystem genau von dem Paar $(x;y)$ = $(11;13)$ erfüllt.

---

1) Das Ausscheiden von v_1 kann auch, ohne zuvor explizit (7) zu erwähnen, damit begründet werden, daß (für diesen Wert von v) $2 - v = - 5 \neq 5 = \sqrt{18 + v}$ gilt, also (5) nicht erfüllt ist. (Oder man kann auch vermittels (4) bis zu der Feststellung zurückgehen, daß (1) nicht erfüllt wird.)

<u>331322 Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

a) Für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ gilt

$$\frac{4^2-9}{4^2-4} \cdot \frac{5^2-9}{5^2-4} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2-9}{n^2-4}$$

$$= \frac{(4-3)\cdot(4+3)}{(4-2)\cdot(4+2)} \cdot \frac{(5-3)\cdot(5+3)}{(5-2)\cdot(5+2)} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-3)\cdot(n+3)}{(n-2)\cdot(n+2)}$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-3)}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)} \cdot \frac{7\cdot 8\cdot\ldots\cdot(n+3)}{6\cdot 7\cdot\ldots\cdot(n+2)} = \frac{1}{n-2} \cdot \frac{n+3}{6} > \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{6} = \frac{1}{6} .$$

b) <u>1.Lösungsbeginn:</u> Für jede natürliche Zahl $n > 25002$

gilt

$$0{,}0002\cdot n > 5{,}0004 ,$$

$$1{,}0002\cdot(n-2) > n+3 ,$$

$$\frac{n+3}{n-2} < 1{,}0002 ,$$

also

$$\frac{1}{n-2} \cdot \frac{n+3}{6} < 0{,}1667 .$$

<u>2.Lösungsbeginn:</u> Für die Zahlen $z_n = \frac{1}{n-2} \cdot \frac{n+3}{6} = \frac{1+\frac{3}{n}}{6\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)}$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{6} .$$

Für jedes $\varepsilon > 0$, also auch für $\varepsilon = 0{,}1667 - \frac{1}{6}$, gilt daher:

Alle n mit nur endlich vielen Ausnahmen erfüllen

$$\left(\frac{1}{6} - \varepsilon <\right) z_n < \frac{1}{6} + \varepsilon = 0{,}1667 .$$

<u>Gemeinsame Fortsetzung:</u> Wegen der eingangs in a) erhaltenen Umformung ist damit gezeigt, daß die in b) gestellte Frage mit „Nein" zu beantworten ist.

<u>331323 Lösung:</u> <u>9 Punkte</u>

I. Ist $m = 1$, so kann $1994^m - 1993^n$ nur dann eine Quadratzahl sein, wenn $n = 1$ ist; denn für $n \geq 2$ ist

$$1994^m - 1993^n \leq 1994 - 1993^2 < 0 .$$

Für $m = 1$ und $n = 1$ ist $1994^m - 1993^n = 1994 - 1993 = 1$ eine Quadratzahl.

II. Ist $m \geq 2$, so ist 1994^m durch 2^m, also erst recht durch 4 teilbar. Ferner läßt $1993^n = (4 \cdot 498 + 1)^n$ bei Division durch 4 den Rest 1. (Dies kann schrittweise durch wiederholtes Multiplizieren von Zahlen der Form $4k+1$ mit $4 \cdot 498 + 1$ oder durch Anwenden als bekannt zitierter Regeln für das Rechnen mit Kongruenzen modulo 4 gezeigt werden.)
Also läßt $1994^m - 1993^n$ bei Division durch 4 den Rest 3. Jede gerade Quadratzahl ist aber durch 4 teilbar, und jede ungerade Quadratzahl $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ läßt bei Division durch 4 den Rest 1. Also ist $1994^m - 1993^n$ keine Quadratzahl.

Damit ist gezeigt: Unter allen Paaren $(m;n)$ positiver ganzer Zahlen hat genau das Paar $(1;1)$ die Eigenschaft, daß $1994^m - 1993^n$ eine Quadratzahl ist.

<u>331324 Lösung:</u> <u>12 Punkte</u>

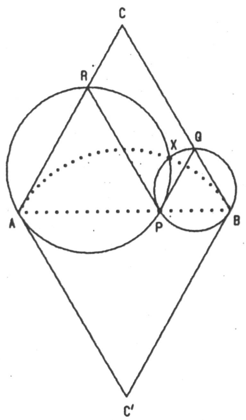

Abb. L 331324

I. Wenn X nach der Beschreibung des Aufgabentextes erhalten werden kann, so folgt: Der Umkreis von APR berührt PQ in P (Beweis: Der zu P führende Radius bildet mit PA einen Winkel 30° und steht daher senkrecht auf PQ), der Umkreis von BPQ berührt PR in P. Also liegt X im Innern (des Parallelogramms PQCR und somit erst recht) des Dreiecks ABC. Ferner gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\overline{\measuredangle AXP} = \overline{\measuredangle ARP} = 60^\circ$ und $\overline{\measuredangle BXP} = \overline{\measuredangle BQP} = 60^\circ$, also $\overline{\measuredangle AXB} = \overline{\measuredangle AXP} + \overline{\measuredangle BXP} = 120^\circ$. Daher ist AC'BX ein Sehnenviereck; d.h., X liegt auf dem Umkreis von ABC'.

II. Wenn X im Innern von ABC und auf dem Umkreis von ABC' liegt, so folgt: Da AC'BX ein Sehnenviereck ist, gilt $\overline{\measuredangle AXB} = 120^\circ$. Somit gibt es auf AB einen Punkt P zwischen A und B, für den $\overline{\measuredangle AXP} = 60^\circ$ gilt. Für diesen Punkt ist dann $\overline{\measuredangle BXP} = \overline{\measuredangle AXB} - \overline{\measuredangle AXP} = 60^\circ$. Also gilt $\overline{\measuredangle AXP} = \overline{\measuredangle ARP}$ und $\overline{\measuredangle BXP} = \overline{\measuredangle BQP}$; nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes liegt X folglich sowohl auf dem Umkreis von APR als auch auf dem Umkreis von BPQ.

<u>2.Lösungsweg:</u> Man kann ein Koordinatensystem so wählen, daß $A = (-1;0)$, $B = (1;0)$, $C = (0;\sqrt{3})$ gilt. In diesem Koordinatensystem wird $C' = (0; -\sqrt{3})$, und zu betrachten ist für jedes p mit $-1 < p < 1$ der Punkt $P = (p;0)$. Hierzu findet man der Reihe nach $Q = \left(\frac{1}{2}(1+p);\frac{1}{2}(1-p)\sqrt{3}\right)$, $R = \left(\frac{1}{2}(p-1);\frac{1}{2}(p+1)\sqrt{3}\right)$; der Umkreis von APR bzw. von BPQ hat als Gleichung

$$\left(x - \frac{1}{2}(p-1)\right)^2 + \left(y - \frac{1}{6}(p+1)\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{3}(p+1)^2 ,$$

$$\text{d.h.} \quad x^2 + y^2 + (1-p)\cdot x - \frac{1}{3}(1+p)\sqrt{3}\cdot y = p \tag{1}$$

bzw. $$\left(x - \frac{1}{2}(1+p)\right)^2 + \left(y - \frac{1}{6}(1-p)\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{3}(1-p)^2 ,$$

$$\text{d.h.} \quad x^2 + y^2 - (1+p)\cdot x - \frac{1}{3}(1-p)\sqrt{3}\cdot y = -p . \tag{2}$$

Das Gleichungssystem (1),(2) ergibt als Lösungen (zu finden, indem man erst durch Subtraktion eine lineare Gleichung gewinnt, mit der dann z.B. x eliminiert werden kann) die Punkte $P = (p;0)$ und

$$X = (x;y) = \left(\frac{4p}{3 + p^2} ; \frac{1 - p^2}{3 + p^2}\cdot\sqrt{3} \right) .$$

Für die Menge aller so zu erhaltenden Punkte X kann man nun feststellen, daß sie eine Gleichung des Umkreises von ABC' erfüllen,

nämlich $x^2 + \left(y + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$, d.h. $x^2 + y^2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot y = 1$.

Ferner durchläuft die Abszisse x von X alle Werte mit $-1 < x < 1$ und die Ordinate y von X alle Werte mit $0 < y \leq \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Damit hat sich der im Aufgabentext genannte Kreisbogen ergeben, wie behauptet.

<u>Bemerkungen:</u> Die Aussage kann sinngemäß erweitert werden, wenn P die gesamte Gerade durch A, B durchläuft (und entsprechend Q, R Geraden statt der Strecken BC bzw. CA): X durchläuft dann den gesamten Umkreis von ABC' mit Ausnahme des Punktes C'. (Auch für Dreiecke APR, BPQ mit anderen Winkeln als 60° gibt es analoge Aussagen.) Bemerkenswert ist auch ein Zugang vermittels der Aussage (wenn sie zuvor bewiesen wird), daß stets X der Schnittpunkt des genannten Umkreisbogens von ABC' mit der Geraden durch C',P ist.

L 11-13

Vorschläge zur Punktverteilunmg:

331321

Erste Vereinfachung, z.B Zurückführung auf (5),(6) 2

Lösung von (5) (einschließlich des Ausschließens einer Lösung einer quadratischen Gleichung; ein hierfür vorzusehender Anteil eventuell an anderer Stelle des Lösungsweges 4

Ermittlung von u, dann von x,y; Probe 3

9

331322

a) Vorbereitende Umformung 3
Gewinnung der zu zeigenden Ungleichung 2 5

b) Ermittlung eines n, von dem ab „ < " gilt
(oder: Grenzwertnachweis) 3
Durchführung der geforderten Widerlegung ... 2 5

10

331323

Nachweis, daß (1;1) im Fall m=1 einzige Lösung ist 3

Nachweis, daß keine Lösung mit m≥2 existiert:

Erster Teilnachweis, (z.B. Reste 0 und 1 mod 4) 3

Zweiter Teilnachweis (im Beispiel: Reste aller Quadrate) und Abschluß des Beweises 3

9

331324

Erster Beweisteil:

Wenn X auf beiden Umkreisen, dann auf dem behaupteten Bogen:

Folgerung, daß $\overline{\measuredangle AXB} = 120^\circ$ gelten muß 3
X in ABC und auf dem Umkreis von ABC' 3

Oder (z.B.): Einstieg in eine Lösung mit Koordinaten 6

Koordinaten von A, B, C, C', P, Q, R 3
Gleichungen der beiden Umkreise 3

Zweiter Beweisteil:

Wenn X auf dem behaupteten Bogen, dann auf beiden Umkreisen:

Definition P auf AB mit (z.B.) $\overline{\measuredangle AXB} = 60^\circ$ ... 3
X liegt hierfür auf beiden Umkreisen 3

Oder (Koord.-Lösung): Abschluß der Mengenermittlung 6

Koordinaten: Schnittpunkt der Umkreise 3
Bestätigung der Umkreisgleichung von ABC' und von $-1 < x < 1$, $0 < y \leq \sqrt{3}/3$ 3

12