33. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe
Aufgaben
Olympiadeklasse 10
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

331041

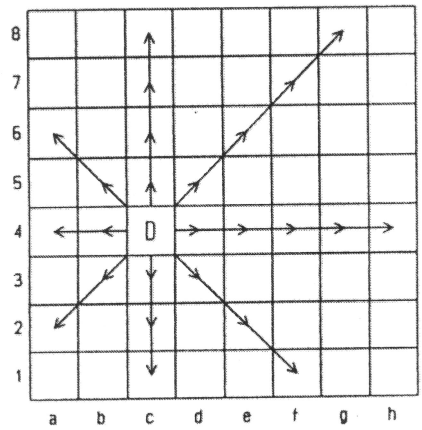

Abb. A 331041

Auf einem Schachbrett wird eine Figur „Dame" betrachtet, die wie im Schachspiel ziehen kann, also in den acht Richtungen parallel zum Brettrand oder diagonal, jeweils beliebig viele Felder. (Siehe z.B. in Abb. A 331041 alle von c4 aus möglichen Züge.)

Als *Länge eines Zuges* werde stets die Streckenlänge vom Mittelpunkt des Anfangsfeldes zum Mittelpunkt des Zielfeldes des Zuges bezeichnet. Dabei werde die Seitenlänge jedes der 64 quadratischen Felder als Längeneinheit genommen.

Gesucht wird eine Zugfolge, die den folgenden Bedingungen genügt:

(1) Bei jedem Zug der Zugfolge - mit Ausnahme des letzten - soll der Zug, der sich anschließt (d.h. als Startfeld das eben erreichte Zielfeld hat), eine *größere Länge* haben als der Zug, an den er sich anschließt.

(2) Das Zielfeld des letzten Zuges soll dem Startfeld des ersten Zuges *benachbart* sein (und zwar eine Seite mit ihm gemeinsam haben, nicht nur eine Ecke).

(3) Die Zugfolge soll in der Summe der Längen ihrer Züge *von keiner Zugfolge, die den Bedingungen* (1) *und* (2) *genügt, übertroffen* werden.

Geben Sie eine Zugfolge an und beweisen Sie, daß sie die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt!

331042

an beweise, daß es unendlich viele rationale Zahlen t gibt, für ie $\sqrt{t + \sqrt{t}}$ rational ist.

331043

u einem regelmäßigen Achteck werde ein Quadrat so konstruiert, aß der Mittelpunkt des Achtecks ein Eckpunkt des Quadrats ist und aß zwischen der Seitenlänge a des Achtecks und der Seitenlänge b es Quadrats die Ungleichung $b \geq \frac{4}{3} a$ gilt. Dann bezeichne f den lächeninhalt desjenigen Flächenstücks, das dem Achteck und dem uadrat gemeinsam ist.

) Man beweise, daß zu gegebenem Achteck für alle Quadrate, die dieser Beschreibung entsprechen, f denselben Wert hat.

) Man ermittle diesen Flächeninhalt f, formelmäßig durch die Seitenlänge a des Achtecks ausgedrückt.

33. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe
Aufgaben
Olympiadeklasse 10
2. Tag

331044

Jemand findet die Angabe

$$23! = 2585201673*8849*6640000 .$$

Darin sind auch die zwei durch * angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 23! entsprechen.

Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie!

Dabei darf verwendet werden, daß die angegebenen Ziffern korrekt sind.

Hinweis: Für jede positive ganze Zahl n wird n! definiert als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

330945

Bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems werde ein Punkt der Ebene „rational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde „irrational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde „gemischt" genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational und die andere irrational ist.

a) Gibt es in der Ebene Geraden, die nur Punkte einer Sorte enthalten? Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede der drei Sorten „rational", „irrational", „gemischt"!

b) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus genau zwei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist? Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten!

c) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?

331046

An einem Dreieck ABC wurde festgestellt, daß es folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$ ist ein spitzer Winkel.

(2) Die Seite BC hat die Länge $a = \overline{BC} = 6{,}5$ cm .

(3) Für die Seitenlängen $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ gilt $b - c = 4{,}5$ cm .

(4) Für die Längen h_b bzw. h_c der auf AC bzw. AB senkrechten Höhen gilt $h_c - h_b = 2{,}7$ cm .

Beweisen Sie, daß es bis auf Kongruenz nur ein Dreieck gibt, das diese Bedingungen erfüllt!

33. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 10
1. Tag

7 Punkte

331041 Lösung:

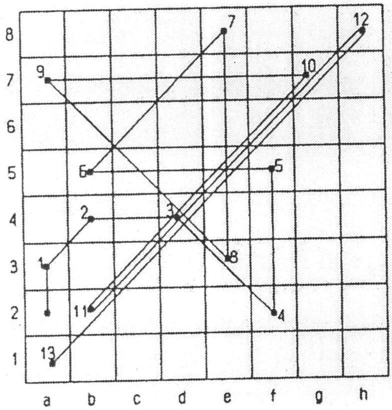

Abb. L 331041

Es gibt nur Züge der Längen

$$\left.\begin{matrix} 1, & \sqrt{2}, & 2, & 2\sqrt{2}, & 3, & 4, & 3\sqrt{2}, \\ 5, & 4\sqrt{2}, & 6, & 7, & 5\sqrt{2}, & 6\sqrt{2}, & 7\sqrt{2}. \end{matrix}\right\} \quad (*)$$

Wie aus $\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ folgt, sind sie in dieser Aufzählung (*) der Größe nach geordnet. Die Zugfolge a2 - a3 - b4 - d4 - f2 - f5 - b5 - - e8 - e3 - a7 - g7 - b2 - h8 - a1 (Abb.L 331041) erfüllt (1) und (2). Ihre Züge haben die Längen (*) mit Ausnahme der Länge 7.

Angenommen nun, es gäbe eine Zugfolge, die ebenfalls (1),(2) erfüllt und in der Summe der Längen ihrer Züge die angegebene Zugfolge übertrifft. Da sie keine der Längen (*) mehrfach enthalten könnte, müßte sie die vier Längen 7, $5\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$, $7\sqrt{2}$ enthalten (und von den vorangehenden Längen 1, $\sqrt{2}$, ..., 6 könnten höchstens solche fehlen, deren Summe kleiner als 7 wäre). Für eine derartige Zugfolge würde gelten: Der letzte Zug der Länge $7\sqrt{2}$ müßte eine der Diagonalen a1-h8, h1-a8 vollständig durchschreiten. Der vorangehende Zug müßte auf derselben Diagonale in einem der Felder b2, g7, g2, b7 beginnen, der Zug davor (mit der Länge $5\sqrt{2}$) ebenfalls auf dieser Diagonale in dem dort jeweils anderen dieser Felder. Zu keinem dieser vier Felder führt aber ein Zug der Länge 7.

Damit ist die obige Annahme widerlegt; d.h., die angegebene Zugfolge erfüllt auch (3).

6 Punkte

331042 Lösung:

Es genügt, als Beispiel unendlich viele rationale Zahlen t anzugeben (so zu charakterisieren, daß die Existenz unendlich vieler ersichtlich ist) und zu bestätigen, daß für sie $\sqrt{t + \sqrt{t}}$ rational ist. Ein solches Beispiel bilden etwa die Zahlen $t = \frac{1}{(n^2 - 1)^2}$ $(n = 2, 3, 4, \dots)$: denn für sie gilt

$$\sqrt{t+\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{1}{(n^2-1)^2} + \frac{1}{n^2-1}} = \sqrt{\frac{1+n^2-1}{(n^2-1)^2}} = \frac{n}{n-1} .$$

Bemerkungen: 1. Zum Finden solcher Beispiele führt etwa der Ansatz, bereits $\sqrt{t}$ rational zu wählen, also $t = \frac{a^2}{b^2}$ mit natürlichen Zahlen a, b : Hiermit wird $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational, wenn $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b}$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist. Wegen $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} = \frac{a(a+b)}{b^2}$ wird das z.B. erreicht, wenn sowohl a als auch a+b Quadratzahlen sind. Eine der Möglichkeiten hierzu, nämlich $a = 1$, $a+b = n^2$, wurde oben gewählt.

2. Die Lösungsdarstellung kann auch in einer solchen - mehr der Heuristik folgenden - Beschreibung vorgehen. Jedoch wird andererseits eine (*zusätzlich* zu korrekter Beweisführung erbrachte) Wiedergabe heuristischer Motive nicht vom Schüler verlangt.

331043 Lösung: 7 Punkte

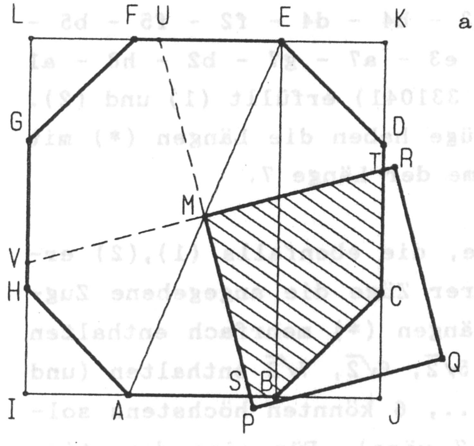

Abb.L 331043

a) Man zeigt zunächst, daß b wegen der Voraussetzung $b \geq \frac{4}{3}a$ größer als der Umkreisradius r des Achtecks ist. Hierzu kann r (z.B.) wie folgt ermittelt werden: Aus dem Achteck ABCDEFGH entsteht durch Verlängern der Seiten AB, CD, EF, GH ein Quadrat IJKL (siehe Abb. L 331043). Mit $\overline{AB} = \overline{BC} = \cdots = \overline{HA} = a$ wird $\overline{BJ} = \overline{JC} = \overline{DK} = \cdots = \overline{IA} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Es folgt $\overline{BE} = \overline{JK} = a(1+\sqrt{2})$, also nach dem Satz des Pythagoras $\overline{AE} = \sqrt{a^2 + a^2(1+\sqrt{2})^2} = a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

Der Mittelpunkt M der Strecke AE ist der Mittelpunkt des Achtecks; somit gilt $r = \overline{MA} = \cdots = \overline{ME} = \cdots = \overline{MH} = \frac{1}{2}\overline{AE} = a\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}$. Wegen $49 > \frac{81}{2}$ gilt $7 > \frac{9}{2}\sqrt{2}$, $16 > 9(1+\frac{1}{2}\sqrt{2})$, $\frac{4}{3} > \sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}$; aus $b \geq \frac{4}{3}a$ folgt daher in der Tat $b > r$.

Für jedes Quadrat MPQR, das der Beschreibung der Aufgabe entspricht, gilt somit: P, Q und R liegen außerhalb des Achtecks, MP schneidet dessen Umfang. Der Schnittpunkt S liege o.B.d.A. auf der Seite AB (eventuell mit einem ihrer Endpunkte, etwa B, zusammenfallend). Ferner schneidet MR die Seite CD in einem Punkt T ; das Quadrat hat mit dem Achteck das Flächenstück MSBCT gemeinsam. Weiter gilt: Die Verlängerungen von PM und RM über M hinaus schneiden die Seiten EF bzw. GH jeweils in einem Punkt U bzw. V; und es ist $\overline{\angle AMS} = \overline{\angle CMT} = \overline{\angle EMU} = \overline{\angle GMV}$, wegen $\overline{MA} = \overline{MC} = \overline{ME} = \overline{MG}$ und $\overline{\angle MSA} = \overline{\angle MTC} = \overline{\angle MUE} = \overline{\angle MVG}$ nach dem Kongruenzsatz sww also $\Delta MSA \cong \Delta MTC \cong \Delta MUE \cong \Delta MVG$. Daher und wegen $\Delta MAB \cong \Delta MBC \cong \cong \cdots \cong \Delta MHA$ sind auch die Flächenstücke MSBCT, MTDEU, MUFGV und MVHAS einander kongruent. Da das Achteck in diese vier Flächenstücke zerlegt ist, hat jedes von ihnen als Flächeninhalt f ein Viertel des Flächeninhalts des Achtecks.

b) Den Flächeninhalt des Achtecks kann man erhalten, indem man vom Flächeninhalt des Quadrates IJKL den (vierfachen Flächeninhalt des Dreiecks BJC oder, was dasselbe ist, den) zweifachen Flächeninhalt eines Quadrates der Seitenlänge $\overline{BJ}$ subtrahiert. So ergibt sich

$$f = \frac{1}{4}\left(a^2(1+\sqrt{2})^2 - 2\cdot\frac{1}{2}a^2\right) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\cdot a^2.$$

<u>Vorschläge zur Punktverteilung:</u>

<u>331041</u>

Finden einer Zugfolge der geforderten Art 3
Nachweis ihrer Maximalität 4
7

<u>331042</u>

Beschreibung von (ersichtlich) unendlich vielen rationalen Zahlen t 2
Nachweis, daß für sie $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational ist 4
6

<u>331043</u>

a) (Im Text oder aus Zeichnung ersichtliche) Einsicht in Erfordernis bzw. Herleitbarkeit der Aussage, daß stets die Quadrat-Ecken $\neq$ M außerhalb des Achtecks liegen 1
Gewinnung dieser Aussage (z.B. in der Gestalt $b > r$) aus der Voraussetzung $b \geq 4a/3$ 2
Schluß auf Zerlegung des Achtecks in vier flächengleiche Flächenstücke (oder anderer, z.B. mehr rechnerischer, Nachweis der Unabhängigkeit des Wertes f von Lage und Größe des - mit $b \geq 4a/3$ vorausgesetzten - Quadrates MPQR) 2
b) Ermittlung von f, ausgedrückt durch a [eventuell (teilweise) Vergabe dieser Punkte unter a)] .. 2
7

33. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 10
2. Tag

331044 Lösung: 6 Punkte

Für die gesuchten Ziffern x und y gilt:

Da $23! = 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot\cdots\cdot 23$ durch 9 und durch 11 teilbar ist, folgt nach den Teilbarkeitsregeln für diese Zahlen:

$$2+5+8+5+2+0+1+6+7+3+x+8+8+4+9+y+6+6+4+0+0+0+0$$
$$= 84 + x + y \text{ ist durch 9 teilbar,} \qquad (1)$$
$$2-5+8-5+2-0+1-6+7-3+x-8+8-4+9-y+6-6+4-0+0-0+0$$
$$= 10 + x - y \text{ ist durch 11 teilbar.} \qquad (2)$$

Aus (2) folgt: $x-y-1 = (10+x-y) - 11$ ist durch 11 teilbar. Wegen $0 \leq x \leq 9$ und $0 \leq y \leq 9$, also $-10 \leq x-y-1 \leq 8$ ist das nur mit $x = y+1$ möglich.

Aus (1) folgt damit: $85 + 2y$ ist durch 9 teilbar. Wegen $85 + 2y = 81 + 2\cdot(2+y)$ und da 2 und 9 zueinander teilerfremd sind, muß auch $2+y$ durch 9 teilbar sein. Wegen $0 \leq y \leq 9$ ist das nur für $y = 7$ der Fall.

Damit ist bewiesen: Die erste bzw. die zweite fehlende Ziffer lautet 8 bzw. 7.

331045 Lösung: 7 Punkte

Jede Gerade in der Ebene hat entweder eine Gleichung $x = c$ mit einer reellen Zahl c oder eine Gleichung $y = mx + n$ mit reellen Zahlen m und n. Nun wird gezeigt:

a) I. Es gibt keine Gerade, die nur „rationale" Punkte enthält.
Beweis: In beiden Gleichungsformen $x = c$, $y = mx + n$ kann für die unabhängig zu wählende Variable (y bzw. x) eine irrationale Zahl eingesetzt werden.

II. Mit Vertauschung von „rational", „irrational" folgt ebenso: Es gibt keine Gerade, die nur „irrationale" Punkte enthält.

III. Es gibt keine Gerade, die nur „gemischte" Punkte enthält.
Beweis: In jeder Geraden $x = c$ mit rationalem bzw. irrationalem c ist zum Beispiel (c,c) ein „rationaler" bzw. ein „irrationaler" Punkt. In jeder Geraden $y = mx + n$ mit rationalem n ist (0,n) ein „rationaler" Punkt. In jeder Geraden $y = mx + n$ mit irrationalem n ist beispielsweise jeweils

als ein „irrationaler" Punkt enthalten: $\left(\frac{n}{m}, 1+n\right)$, falls m irrational ist; $(n,(m+1)n)$, falls m rational ist und $m \neq -1$ gilt; $(-n,2n)$, falls $m = -1$ gilt.

b) Für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten gibt es Geraden, die (mindestens) je einen Punkt der zwei zusammengestellten Sorten, aber keinen Punkt der dritten Sorte enthalten. Zum Beweis genügt es, beispielsweise zu bestätigen:

I. Die Gerade $y = x$ enthält „rationale" und „irrationale" Punkte (nämlich für rationales bzw. irrationales x), aber keinen „gemischten" Punkt.

II. Entsprechend ist etwa die Gerade $x = 0$ ein Beispiel für die Zusammenstellung „rational"/„gemischt",

III. die Gerade $x = \sqrt{2}$ ein Beispiel für „gemischt"/„irrational".

c) Es gibt Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist. Beweis: Beispielsweise enthält die Gerade $y = x\cdot\sqrt{2}$ den „rationalen" Punkt $(0,0)$, den „gemischten" Punkt $(\sqrt{2}, 2)$ und den „irrationalen" Punkt $(\sqrt{3}, \sqrt{6})$.

Hinweis: In mehreren Beweisteilen (auch bei anderen Möglichkeiten der Beweisführung) werden Sätze der folgenden Art herangezogen: Sind a und b rational, so auch $a+b$, $a\cdot b$ und (falls $b \neq 0$ ist) $\frac{1}{b}$. Ist a rational und b irrational, so sind $a+b$, $\frac{1}{b}$ und (falls $a \neq 0$ ist) $a\cdot b$ irrational. Derartige Sätze können als bekannter Sachverhalt zitiert werden.

331046, 1.Lösungsweg: 7 Punkte

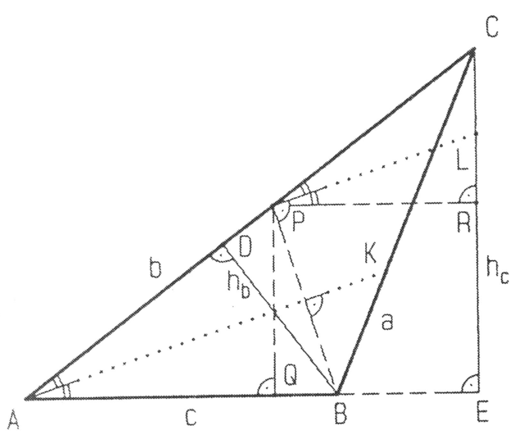

Abb.L 331046

Für jedes Dreieck ABC, das die Bedingungen (1) bis (4) erfüllt, gilt:

Ist P derjenige Punkt auf AC, für den $\overline{AP} = \overline{AB}$ gilt, so ist nach (3)

$\overline{PC} = b-c = 4,5$ cm . (*)

Sind ferner D, E die Fußpunkte der auf AC bzw. AB senkrechten Höhen und sind Q, R die Fußpunkte der Lote von P auf AB bzw. CE (siehe Abb.L 331046), so ist QERP ein Rechteck. Aus $\overline{AB} = \overline{AP}$,

$\overline{\sphericalangle ADB} = \overline{\sphericalangle AQP} = 90^\circ$ und $\overline{\sphericalangle BAD} = \overline{\sphericalangle PAQ}$ folgt nach dem Kongruenzsatz sww, daß $\Delta\ ABD \cong \Delta\ APQ$ gilt. Daher ist $\overline{BD} = \overline{PQ} = \overline{RE}$, also nach (4)

$$\overline{CR} = h_c - h_b = 2{,}7\ \text{cm}\ . \qquad (**)$$

Durch (*), (**) und $\overline{\sphericalangle PRC} = 90^\circ$ ist das Dreieck PRC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt (es kann aus diesen Größen eindeutig konstruiert werden).

Wegen (1) liegen E, Q und R auf derselben Seite der Geraden durch A,C wie B. Daher und wegen $PR \parallel QE$ ist die im Dreieck PRC gebildete Winkelhalbierende PL parallel zu der in ABC zu bildenden Winkelhalbierenden AK. Diese ist im gleichschenkligen Dreieck ABP zugleich die Höhe auf PB; d.h., es gilt $PB \perp AK$ und folglich auch

$$PB \perp PL\ . \qquad (***)$$

Also ergibt sich, ausgehend vom Dreieck PRC, eindeutig weiter (es kann folgendermaßen eindeutig weiter konstruiert werden): Die Senkrechte, die man in P auf PL nach derselben Seite von PC wie R errichtet, schneidet den um C mit dem Radius a = 6,5 cm konstruierten Kreis in B; die Parallele durch B zu PR schneidet die Verlängerung von CP in A.

Also erfüllt nur ein (so konstruiertes, d.h.) hiermit bis auf Kongruenz eindeutig bestimmtes Dreieck ABC die Bedingungen (1) bis (4).

<u>Bemerkungen:</u> Das zeichnerische Ausführen einer solchen Konstruktion wird nicht vom Schüler gefordert. Andererseits kann auch eine Darstellung akzeptiert werden, bei der ein beschreibender Text (teilweise) durch Verweis auf Lageverhältnisse oder Konstruktionselemente in einer (prinzipiell richtigen) Skizze ersetzt wird.

Ein Nachweis, daß aus einer - aus (1) bis (4) hergeleiteten, konstruktiv oder beschreibend gefaßten - eindeutigen Gewinnung eines Dreiecks auch umgekehrt auf die Erfüllung der Bedingungen (1) bis (4) geschlossen werden kann, ist nicht erforderlich, da die Existenz eines Dreiecks, das diese Bedingungen erfüllt, dem Aufgabentext zu entnehmen ist.

<u>2.Lösungsweg:</u>

Für jedes Dreieck ABC, das (1) bis (4) erfüllt, gilt:

Mit $\alpha = \overline{\sphericalangle BAC}$ ist $h_c = b\cdot\sin\alpha$, $h_b = c\cdot\sin\alpha$, nach (4),(3) also

$$2{,}7\ \text{cm} = h_c - h_b = (b - c)\cdot\sin\alpha = 4{,}5\ \text{cm}\cdot\sin\alpha\ ,$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}\ .$$

Nach (1) ist $\cos\alpha > 0$, also folgt $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{4}{5}$. Wegen (2), nach dem Kosinussatz sowie wegen (3) gilt daher

$$42{,}25\ \text{cm}^2 = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$
$$= (b - c)^2 + 2bc\cdot(1 - \cos\alpha) = 20{,}25\ \text{cm}^2 + 2bc\cdot\frac{1}{5}\ ,$$
$$2bc = 5\cdot(42{,}25 - 20{,}25)\ \text{cm}^2 = 110\ \text{cm}^2. \qquad (5)$$

Durch (3) und (5) (sowie $b > 0$, $c > 0$) sind aber b und c eindeutig bestimmt. Dies kann als bekannter Sachverhalt über Gleichungssysteme, in denen Differenz und Produkt der Unbekannten vorgegeben sind, zitiert werden (ohne b und c konkret zu ermitteln); man kann auch das Gleichungssystem (3),(5) lösen: Es folgt

$$(b + c)^2 = (b - c)^2 + 4bc = (20{,}25 + 220)\ \text{cm}^2\ ,$$
$$b + c = \sqrt{240{,}25}\ \text{cm} = 15{,}5\ \text{cm}\ ;$$

hieraus und aus (3) ergibt sich $b = 10$ cm, $c = 5{,}5$ cm.

<u>Vorschläge zur Punktverteilung:</u>

<u>331044</u>

Schluß auf (1) und (2) (oder entsprechend
weiterführende Aussagen) 3
Herleitung von $y = 7$ und $x = 8$ (2 Pkte + 1 Pkt.) 3
6

<u>330945</u>

a) Nichtexistenz von Geraden nur mit „rationalen" oder nur mit „irrationalen" Punkten 1
Nichtexistenz von Geraden nur mit „gemischten" Punkten 2
b) Existenz jeweils einer Geraden mit Punkten aus genau zwei der drei Sorten
für eine Zusammenstellung zweier Sorten, ... 1
für die beiden anderen Zusammenstellungen 1
c) Existenz einer Geraden mit (mindestens) je einem Punkt aus jeder Sorte 2
7

<u>330946</u>

Erster weiter nutzbarer Beweisschritt
(z.B. Konstruierbarkeit des Dreiecks PRC oder Ermittlung von $\sin\alpha$ aus $b-c$ und $h_c - h_b$) 3
Anschließend weiterführender Schritt
(z.B. Nachweis von $PB \perp PL$ oder Nutzung des Kosinussatzes zur Ermittlung von $b\cdot c$) 2
Abschließender Eindeutigkeitsnachweis 2
7