33. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 10
1. Tag

331031 Lösung: 6 Punkte

Zu jeder natürlichen Zahl $p > 1$ gibt es natürliche Zahlen q, r, für die

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \text{ und } p < q < r \qquad (1)$$

gilt. Dies kann mit $\frac{1}{p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p\cdot(p+1)}$ bestätigt werden; für spezielle p auch auf andere Weise, beispielsweise für $p = 2n$ mit $\frac{1}{2n} = \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}$. Wiederholte Anwendung von (1) ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1994} &= \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1}\\
&= \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{r_2}\\
&= \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{r_3}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&= \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \cdots + \frac{1}{q_{1993}} + \frac{1}{r_{1993}}
\end{aligned}$$

mit natürlichen Zahlen $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{1993}, r_{1993}$,

für die $q_1 < q_2 < q_3 < \dots < q_{1993} < r_{1993}$

gilt. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

331032 Lösung: 7 Punkte

In der Zifferndarstellung jeweils einer positiven ganzen Zahl n bezeichne z die erste Ziffer, ferner sei k die Anzahl der auf z folgenden Ziffern. Die durch diese k Ziffern dargestellte Zahl sei m. Mit diesen Bezeichnungen gilt $n = z\cdot 10^k + m$ sowie $n' = 10m + z$.

I. Wenn die Bedingung $n' = n:7$ erfüllt ist, so folgt

$$\begin{aligned}
10m + z &= (z\cdot 10^k + m):7,\\
70m + 7z &= z\cdot 10^k + m,\\
69m &= z\cdot(10^k - 7). \qquad (1)
\end{aligned}$$

a) Ist z nicht durch 3 teilbar, so muß $10^k - 7$ durch 69 teilbar sein. Die Zifferndarstellung der Zahl $10^k - 7$ besteht aus $k-1$ Ziffern 9, gefolgt von einer Ziffer 3. Eine solche Zahl ist nur dann durch 69 teilbar, wenn man zum Dividieren durch 69 mit dem bekannten Divisionsverfahren die Anzahl $k-1$ der Ziffern 9 so groß wählen kann, daß erst dann die Ziffer 3 heranzuziehen ist, wenn bei einem Teilschritt des Verfahrens ein Rest vorkommt, aus dem durch Anhängen der Ziffer 3 eine durch 69 teilbare Zahl entsteht. Die folgende Rechnung zeigt, daß die kleinste Zahl k, für die das zutrifft, $k = 21$ ist:

L 10.I

```
9999999999999999993 : 69 = 144927536231884057 97
309
 339
  639
   189
    519
     369
      249
       429
        159
         219
          129
           609
            579
             279
               399
                549
                 669
                  483
```

Zugleich ist das Divisionsergebnis die kleinste positive Zahl m, für die (1) mit z = 1 erfüllt ist. Außerdem folgt: Für jede andere nicht durch 3 teilbare Ziffer z' > 0 ergibt sich die kleinste positive ganze Zahl m, durch die (1) mit diesem z' anstelle von z erfüllt wird, indem man die eben (zu z = 1) gefundene Zahl m mit z' multipliziert.

Als kleinste positive ganze Zahl n, die die Bedingung n' = n:7 erfüllt und eine nicht durch 3 teilbare Anfangsziffer hat, kommt daher nur die Zahl

$$n = 10^{21} + m = 1014492753623188405797 \qquad (2)$$

in Frage.

b) Ist z durch 3 teilbar, also z = 3y mit $1 \leq y \leq 3$, so folgt aus (1) zunächst $23m = y\cdot(10^k - 7)$ und dann entsprechend wie in a) durch die Rechnung

```
9999999999999999993 : 23 = 434782608695652173 91 ,
 79
 109
  179
   189
     59
     139
       199
        159
         219
          129
           149
            119
              49
               39
               169
                 89
                 209
                   23
```

daß als kleinste positive ganze Zahl n, die die Bedingung $n' = n:7$ erfüllt und eine durch 3 teilbare Anfangsziffer z hat, nur die Zahl

$$n = 3\cdot 10^{21} + m = 3043478260869565217391 \qquad (3)$$

in Frage kommt.

II. Die in (2) genannte Zahl n ist kleiner als die in (3) genannte Zahl, und sie erfüllt wegen

$$1014492753623188405797 : 7 = 1449275362318840579 71 \qquad (4)$$

die Bedingung $n' = n:7$.

Mit II. ist gezeigt, daß es positive ganze Zahlen n mit $n' = n:7$ gibt; mit I. und II. ist die in (2) genannte Zahl als die kleinste derartige Zahl nachgewiesen.

Bemerkungen: 1. Wenn in I. zu Beginn vermerkt wird, daß nicht nur von $n' = n:7$ auf (1) geschlossen werden kann, sondern auch umgekehrt, so ist - nach der Bestätigung von (1) durch die Division - die „Probe" (4) in II. nicht erforderlich, nur noch der Größenvergleich zwischen (2) und (3).

2. Ein solcher Größenvergleich wird nicht ohne weiteres überflüssig durch die Feststellung, daß das in I.a) erwähnte Multiplizieren mit z' auch im Fall $3|z'$ auf Werte n mit $n' = n:7$ führt (im Fall $z' = 3$ eben zum Wert (3)). Von dieser Feststellung kommt man erst dann zur Minimalität von (2), wenn man noch nachweist, daß für $z' = 3$ auf dem in I.b) angegebenen Weg keine kleinere Periodenlänge als $k = 21$ resultiert. (Ohne dieses direkte Nachrechnen würde man einen solchen Nachweis etwa - unter weiterer Berufung auf die Theorie periodischer Dezimalbrüche - daraus erhalten, daß eine derartige kleinere Periodenlänge auch in dem durch Multiplikation mit z' entstandenen Dezimalbruch (3) ersichtlich wäre.)

3. Die Ermittlung von k in I.a) (sowie in ähnlicher Weise für den eben genannten Nachweis) kann auch so erfolgen: Durch schrittweises Multiplizieren mit 10 und Reduzieren modulo 69 berechnet man $10^2 = 100 \equiv 31$, $10^3 \equiv 310 \equiv 34$, $10^4 \equiv 340 \equiv 64$, ... usw., bis ein k mit $10^k \equiv 7$ gefunden ist. Freilich sind diese Rechenschritte im wesentlichen mit denen des Divisionsverfahrens identisch.

330933 Lösung: 6 Punkte

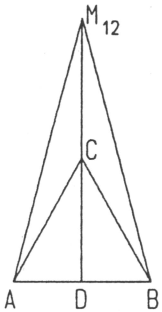
Im gleichseitigen Dreieck ABC ist die Seitenhalbierende CD zugleich Winkelhalbierende, daher gilt $\overline{\measuredangle ACD} = 30^\circ$. Nach Konstruktion ist ferner $\overline{CM_{12}} = s = \overline{CA}$, aus[1)] dem Basiswinkelsatz und dem

1) Siehe Fußnote 2 (nächste Seite)!

Außenwinkelsatz für das Dreieck $AM_{12}C$ folgt daher

$$\overline{\sphericalangle AM_{12}C} = \overline{\sphericalangle M_{12}AC} = \frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle ACD} = 15^\circ. \qquad (1)$$

Im Dreieck ABC ist CD auch Mittelsenkrechte; auf ihrer Verlängerung liegt M_{12}, also ist auch das Dreieck ABM_{12} mit $\overline{AM_{12}} = \overline{BM_{12}}$ gleichschenklig und somit $M_{12}D$ darin Winkelhalbierende. Aus (1) folgt damit[2)]



$$\overline{\sphericalangle AM_{12}B} = 30^\circ = \frac{1}{12}\cdot 360^\circ.$$

In dem durch A und B gehenden Kreis k um M_{12} ist folglich $\sphericalangle AM_{12}B$ zugehöriger Zentriwinkel zu derjenigen Sehnenlänge s, die als Seitenlänge eines regelmäßigen Zwölfecks mit k als Umkreis auftritt.

---

2) Anstelle des Beweiswegs über (1) kann man auch so argumentieren: Da A, B, M_{12} auf einem Kreis um C liegen, ist $\sphericalangle AM_{12}B$ Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $\sphericalangle$ ACM und daher halb so groß wie dieser.

<u>Vorschläge zur Punktverteilung:</u>

<u>331031</u>

Aufweis einer (dann wiederholt nutzbaren) Stammbruchzerlegung	3
Gewinnung einer Zerlegung der geforderten Art	3
	6

<u>331032</u>

Zurückführung auf eine geeignete Aussage, z.B. (1)	3
Ermittlung von m und z in den Fällen a),b)	2
Übergang zu zugehörigen Werten n, Aufweis des kleinsten n	2
	7

<u>331033</u>

Nutzbare Teilaussage, z.B. (1) oder die Einsicht, daß $\sphericalangle AM_{12}B$ Peripheriewinkel zu $\sphericalangle$ ACB ist	3
Abschließende Bestätigung von $\sphericalangle AM_{12}B$ als Zentriwinkel zum Zwölfeck	3
	6

L 10.II

33. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 10
2. Tag

<u>331034 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

I. Wenn bei einer Ersetzung alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden, so folgt für die Ziffern, die an die Stelle der Buchstaben treten:

S ist ungerade, da sonst $F = 0$ wäre. Also ist $F = 5$. Damit verbleibt für die Addition in der Tausenderstelle wegen $E > 0$ nur die Möglichkeit, daß ohne Übertrag aus der Hunderterstelle $E = 1$ auf die Summe 5 führt.

Wäre $S = 3$ oder $S = 7$, so müßte N (wegen des Übertrags 1 bzw. 3 aus $5 \cdot 3 = 15$ bzw. $5 \cdot 7 = 35$ in die Zehnerstelle) die Bedingung erfüllen, daß die Zahl $1 + 5 \cdot N$ bzw. die Zahl $3 + 5 \cdot N$ die Einerziffer N hätte, also die Zahl $1 + 4 \cdot N$ bzw $3 + 4 \cdot N$ durch 10 teilbar wäre. Da sie das als ungerade Zahl aber nicht sein kann und da $S \neq F$ sowie $S \neq E$ sein muß, verbleibt nur die Möglichkeit $S = 9$.

Somit muß wegen des Übertrags aus $5 \cdot 9 = 45$ die Zahl $4 + 5 \cdot N$ die Einerziffer N haben, also $4 + 4 \cdot N$ durch 10 teilbar sein; d.h., die Zahl $4 \cdot N$ muß die Einerziffer 6 haben. Wegen $N \neq S$ verbleibt hierfür nur $N = 4$. Daher und weil kein Übertrag aus der Hunderter- in die Tausenderstelle auftritt, müssen I und Ü wegen des Übertrags aus $4 + 5 \cdot 4 = 24$ die Gleichung $2 + 5 \cdot I = Ü$ erfüllen. Das ist wegen $Ü < 10$ nur mit $I < 2$ möglich, wegen $I \neq E$ kann somit nur $I = 0$, $Ü = 2$ sein.

II. Die hiermit angegebene Ersetzung erfüllt die Bedingungen, daß verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt sind und daß beim Ersetzen jeweils des gleichen Buchstabens durch die gleiche angegebene Ziffer die nebenstehende richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.

$$\begin{array}{rr} & 1049 \\ + & 1049 \\ + & 1049 \\ + & 1049 \\ + & \underline{1049} \\ = & 5245 \end{array}$$

Damit ist gezeigt, daß eine Lösung existiert, jedoch keine von der angegebenen Lösung verschiedene.

<u>Bemerkung zur Korrektur:</u> Die hier ausformulierten Schlußfolgerungen können auch mehr implizit, nämlich als Ausschließungsverfahren in „systematischem Probieren", ausgeführt werden. Es sollte zwar auch bei derartiger Darstellung hinreichend ersichtlich sein, mit welcher Begründung einzelne Fälle ausgeschlossen werden. Jedoch kann es andererseits bei insgesamt übersichtlicher Darstellung akzeptiert werden, wenn z.B. ein Ausschluß wegen Gleichheit (der Belegung verschiedener Buchstaben) nicht immer mit expliziter Angabe der gleichbelegten Buchstaben vorgenommen wurde.

<u>331035 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Für positive ganze Zahlen m, n sind

$$p = m + 1 \quad , \quad q = n + 1 \tag{1}$$

ebenfalls ganze Zahlen und erfüllen

$$p \geq 2 \quad , \quad q \geq 2 \ . \tag{2}$$

Mit diesen Zahlen gilt ferner

$$\frac{m^2}{m+1} + \frac{n^2}{n+1} = \frac{(p-1)^2}{p} + \frac{(q-1)^2}{q} = \frac{p^2 - 2p + 1}{p} + \frac{q^2 - 2q + 1}{q}$$

$$= p - 2 + \frac{1}{p} + q - 2 + \frac{1}{q} \ .$$

Das ist genau dann eine ganze Zahl, wenn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ eine ganze Zahl ist. Wegen (2) gilt $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; und darin gilt genau dann das Gleichheitszeichen, wenn $p = q = 2$ ist, während für alle anderen p, q mit (2) stets $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ kleiner als 1 (und positiv), also keine ganze Zahl ist. Wegen (1) ist damit bewiesen:

Unter allen Paaren $(m;n)$ positiver ganzer Zahlen erfüllt genau das Paar $(m;n) = (1;1)$ die Bedingung, daß $\frac{m^2}{m+1} + \frac{n^2}{n+1}$ eine ganze Zahl ist.

Es gibt <u>andere Lösungsansätze</u>; z.B. kann man an die Umformung

$$\frac{m^2}{m+1} + \frac{n^2}{n+1} = \frac{m^2 - 1}{m+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{n^2 - 1}{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

$$= m - 1 + n - 1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}$$

$$= m - 1 + n + \frac{-(m+1)(n+1) + (n+1) + (m+1)}{(m+1)(n+1)}$$

$$= m - 1 + n - \frac{mn - 1}{mn + m + n + 1}$$

die Feststellung anschließen, daß der zuletzt genannte Bruch wegen $0 \leq mn - 1 < mn + m + n + 1$ genau dann eine ganze Zahl ist, wenn er gleich 0 ist; dies gilt genau im Fall $m = n = 1$.

L 10.II

331036 Lösung:

7 Punkte

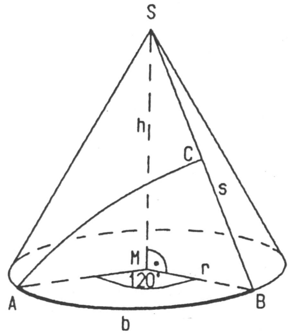


Abb. L 331036 a

Die Mantellinien des Kegels K (siehe Abb. L 331036 a) haben nach dem Satz des Pythagoras und wegen $h = r \cdot \sqrt{3}$ die Länge

$$s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{r^2 + 3r^2} = 2r \qquad (1)$$

Die Länge des Bogens AB im Rand der Grundfläche ist

$$b = \frac{\pi \cdot r \cdot 120^\circ}{180^\circ} . \qquad (2)$$

Man kann die Mantelfläche in eine Ebene E abwickeln; dabei geht sie in einen Kreissektor[1] mit dem Radius s über (siehe Abb. L 331036 b). Gehört darin der Bogen AB zu einem Zentriwinkel der Größe α , so gilt

$$b = \frac{\pi \cdot s \cdot \alpha}{180^\circ} . \qquad (3)$$

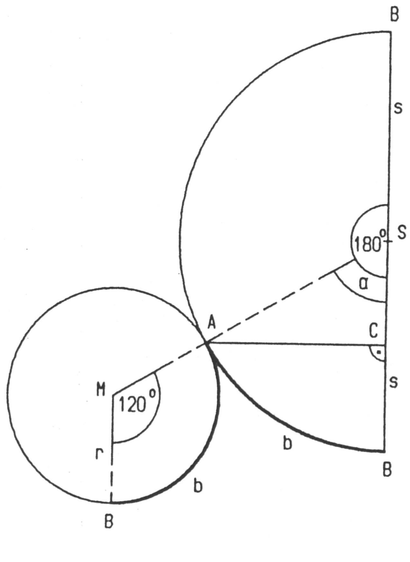


Abb. L 331036 b

[1] Der Sektor ist eine Halbkreisfläche (siehe Fußnote 2). Für den obigen Beweisweg wird diese Feststellung nicht benötigt.

Aus (2), (3) und (1) folgt

$$r \cdot 120^\circ = s \cdot \alpha = 2r \cdot \alpha ,$$

also[2]

$$\alpha = 60^\circ .$$

In der Ebene E ist daher das mit $\overline{AS} = \overline{BS}$ gleichschenklige Dreieck ABS sogar gleichseitig. Ferner bleiben bei dem Abwickeln alle Längen erhalten, also wird dabei der kürzeste von A bis zu einem Punkt C der Strecke BS führende Weg zum Lot AC von A auf BS. Dessen Länge ist die Höhenlänge in dem gleichseitigen Dreieck ABS; sie beträgt folglich $\overline{AC} = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = r \cdot \sqrt{3}$.

---

[2] Man kann auch, ohne die Formel für die Bogenlänge explizit anzuführen, so argumentieren: Zu dem Kreissektor, in den die Mantelfläche beim Abwickeln übergeht, gehört ein Bogen von ebenso großer Bogenlänge wie der Umfang $2\pi r$ der Grundfläche des Kegels; wegen $2\pi r = \pi \cdot s$ ist dieser Kreissektor folglich eine Halbkreisfläche. Daher gehört zu jedem Bogen b dieses Halbkreises ein halb so großer Zentriwinkel wie zum gleichlangen Bogen des Grundkreises des Kegels K.

Vorschläge zur Punktverteilung:

331034

Einstieg, Ermittlung von zwei Ziffern, z.B. von F und S	3
Ermittlung der restlichen Ziffern, (ersichtlich durchgeführte) Probe	4
	7

331035

Zurückführung auf eine geeignet vereinfachte Aussage (z.B.: (1/p)+(1/q) ist eine ganze Zahl)	3
Weitere Diskussion (z.B. von: (1/p)+(1/q) $\leq$ 1)	3
Abschließender Nachweis von (1;1) als einziges gesuchtes Paar	1
	7

331036

Ermittlung von s	1
Ersichtliche Erkenntnis des Zusammenhangs zwischen Zentriwinkeln im Grundkreis und in der Mantelabwicklung	2
Schluß auf Gleichseitigkeit des Dreiecks ABS in der Mantelabwicklung	2
(Ersichtlicher) Schluß auf das Lot als den optimalen Weg, Längenermittlung	2
	7