Kurlauft

A 10

33. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe

Aufgaben

Olympiadeklasse 10

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

331021

Untersuchen Sie, ob es eine vierstellige Quadratzahl q mit den nachstehenden Eigenschaften (1),(2) gibt! Wenn es sie gibt, ermitteln Sie alle derartigen Quadratzahlen!

(1) Alle vier Ziffern von q sind kleiner als 7.

(2) Vergrößert man jede Ziffer von q um 3, so ist die entstehende vierstellige Zahl ebenfalls eine Quadratzahl.

331022

Man beweise, daß es keine natürliche Zahl n gibt, für die $121 \cdot n - 3$ das Produkt zweier unmittelbar aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen wäre.

331023

Beweisen Sie, daß für jedes gleichschenklige Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ die folgende Aussage gilt!

Verlängert man die Strecke AC über C hinaus um ihre eigene Länge bis K, legt man einen Punkt L so auf die Strecke CB zwischen C und B, daß $3 \cdot \overline{CL} = \overline{CB}$ gilt, und ist M der Mittelpunkt von AB, so liegen die drei Punkte K, L, M auf einer gemeinsamen Geraden.

331024

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, in einem würfelförmigen Kasten, der jeweils 4 cm als Innenmaß für Länge, Breite und Höhe hat, mehr als 64 Metallkugeln von 1 cm Durchmesser so unterzubringen, daß keine über den Rand hinausragt!

33. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 10

<u>331021 Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

I. Wenn q eine vierstellige Quadratzahl mit den Eigenschaften (1),(2) ist, so gilt:

Da q eine Quadratzahl ist, gibt es eine natürliche Zahl a mit

$$a^2 = q \,. \qquad (3)$$

Nach (1) gilt

$$1000 \le q \le 6666 \,, \qquad (4)$$

wegen $31^2 = 961$ und $82^2 = 6724$ und (3) also

$$31 < a < 82 \,. \qquad (5)$$

Die nach (2) aus q entstehende Zahl ist q + 3333. Da sie ebenfalls eine Quadratzahl ist, gibt es eine natürliche Zahl b mit

$$b^2 = q + 3333 \,. \qquad (6)$$

Aus (3) und (6) folgt

$$3333 = b^2 - a^2 = (b + a)\cdot(b - a) \,. \qquad (7)$$

Nach (4) gilt $4333 \le q + 3333 \le 9999$, wegen $65^2 = 4225$ und $100^2 = 10000$ und (6) also

$$65 < b < 100 \,. \qquad (8)$$

Aus (5) und (8) folgt

$$96 < b + a < 182 \,.$$

Hiernach und wegen der Zerlegung von 3333 in Primfaktoren, nämlich $3333 = 3\cdot 11\cdot 101$, verbleibt für (7) nur die Möglichkeit, daß $b + a = 101$ und $b - a = 33$ gilt. Aus diesen beiden Gleichungen folgt $2b = 134$ und dann $b = 67$, $a = 34$.

Also kann nur die Quadratzahl $q = 34^2 = 1156$ die Eigenschaften (1),(2) haben.

II. Sie hat die Eigenschaft (1) und wegen $4489 = 67^2$ auch die Eigenschaft (2).

Mit II. ist gezeigt, daß es eine vierstellige Quadratzahl q mit (1),(2) gibt, nach I. und II. ist 1156 die einzige solche Zahl.

331022 Lösung: 10 Punkte

Angenommen, es gäbe eine natürliche Zahl n und zu ihr eine natürliche Zahl x mit

$$x\cdot(x+1) = 121\cdot n - 3 \; . \tag{1}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$x^2 + x - 121\cdot n + 3 = 0 \; ,$$

also wäre x eine der beiden Zahlen

$$x_{1;2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4\cdot 121\cdot n - 11} \; .$$

Somit wäre[1)]

$$4\cdot 121\cdot n - 11 = (2x+1)^2 \tag{2}$$

eine Quadratzahl. Wegen $4\cdot 121\cdot n - 11 = 11\cdot(44n-1)$ müßte folglich der Primfaktor 11 nochmals zu den Teilern von 44n-1 gehören. Also wäre $\frac{44n-1}{11}$ eine ganze Zahl und daher auch $\frac{44n-1}{11} - 4n = -\frac{1}{11}$. Dieser Widerspruch beweist, daß die eingangs gemachte Annahme falsch war; damit ist der verlangte Beweis geführt.

331023 Lösung: 10 Punkte

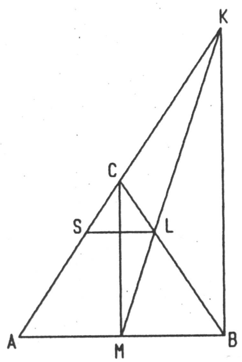

Abb. L 331023

1.Lösungsweg: Wegen $\overline{AC}:\overline{AK} = 1:2 = \overline{AM}:\overline{AB}$ ist nach der Umkehrung des Strahlensatzes CM ∥ KB und dann nach dem Strahlensatz $\overline{CM}:\overline{KB} = 1:2$. Ist weiter L' der Schnittpunkt von CB mit KM, so gilt nach dem Strahlensatz $\overline{L'C}:\overline{L'B} = \overline{CM}:\overline{BK} = 1:2$, d.h. $\overline{CL'} = \frac{1}{3}\,\overline{CB}$. Also fällt L' mit L zusammen, daher liegt L auf KM.

2.Lösungsweg: Ist S der Schnittpunkt von CA mit der Parallelen durch L zu BA, so gilt nach dem Strahlensatz $\overline{SL}:\overline{AB} = \overline{CS}:\overline{CA} = \overline{CL}:\overline{CB} = 1:3$. Ist weiter L'' der Schnittpunkt von KM mit der Geraden durch S und L, so ist

1) Man kann (2) auch aus (1) herleiten, ohne den "Umweg" über das Wurzelziehen zu machen: Multiplikation mit 4, Addition von 1.

nach dem Strahlensatz $\overline{SL''}:\overline{AM} = \overline{KS}:\overline{KA} = \left(\frac{4}{3}\,\overline{CA}\right):\left(2\,\overline{CA}\right) = 2:3$, also $\overline{SL''} = \frac{2}{3}\,\overline{AM} = \frac{1}{3}\,\overline{AB} = \overline{SL}$. Daher fällt L'' mit L zusammen, folglich liegt L auf KM.

Bemerkung: Die Voraussetzung, daß ABC gleichschenklig ist, braucht nicht herangezogen zu werden. Macht man von ihr Gebrauch, so folgt z.B., daß CM und KB auf AB senkrecht stehen, was dann in weiteren Beweisvarianten Verwendung finden kann.

331024 Lösung: 10 Punkte

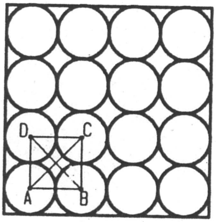

Abb. L 331024 a

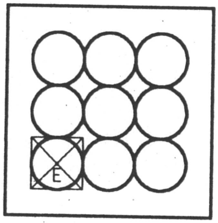

Abb. L 331024 b

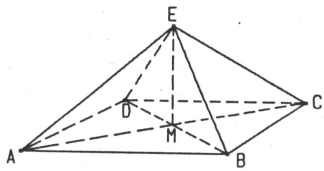

Abb. L 331024 c

Man kann zunächst eine Schicht Kugeln so in den Kasten legen, wie Abb. L 331024 a im Grundriß zeigt. Legt man darüber eine Schicht Kugeln wie in Abb. L 331024 b , so sind die Mittelpunkte A, B, C, D von vier Kugeln der ersten Schicht und der Mittelpunkt E einer Kugel der zweiten Schicht die Ecken einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche und den Kantenlängen $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \overline{AE} = \overline{BE} = \overline{CE} = \overline{DE} = 1$ cm (Abb. L 331024 c). Darin ist $\Delta\,ACE \cong \Delta\,ACB$ nach Kongruenzsatz sss, also hat die Pyramide die Höhe $\overline{ME} = \overline{MB} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm .

Nun kann man Schichten der Anordnungen a, b, a, b, a in den Kasten legen. Sie benötigen insgesamt die Höhe

$$\left(\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)\text{ cm} = (1 + 2\cdot\sqrt{2})\text{ cm}$$

Wegen $8 < 9$ gilt $2\cdot\sqrt{2} < 3$, also $1 + 2\cdot\sqrt{2} < 4$ Damit ist gezeigt: Es ist möglich, sogar $3\cdot 16 + 2\cdot 9 = 66$ Kugeln in dem Kasten so unterzubringen, daß keine über den Rand hinausragt.

Vorschläge zur Punktverteilung:

331021

Eine (entscheidend) weiterverwendbare Aussage, z.B.(7)	3
Weiterführende Schlüsse, z.B. vermittels (5),(8) und der Primzerlegung von 3333 auf b+a und b-a	4
Abschließende Ermittlung von q und Bestätigung	3
	10

331022

Gewinnung einer Aussage, z.B. (2), zur Vorbereitung einer Primzerlegungs- bzw. Rationalitätsdiskussion	5
Durchführung der Diskussion bis zum Abschluß des (indirekten) Beweises	5
	10

331023

Herleitung erster weiterverwendbarer Aussagen, z.B. $CM \parallel KB$ und $\overline{CM}:\overline{KB} = 1:2$	4
Weiterer Schluß, z.B. $\overline{L'C}:\overline{L'B} = \overline{CM}:\overline{BK} = 1:2$ für den Schnittpunkt L' von CB mit KM	3
Abschließende Beweisführung (im Beispiel: $L'=L$, L liegt auf KM)	3
	10

331024

Verwendung einer geeigneten Anordnung z.B. in Schichten (wie in den Abbildungen)	3
Herleitung einer Abstandsangabe (Pyramidenhöhe)	4
Herleitung der insgesamt möglichen Anzahl	3
	10