Olympiadeklasse 9 - 1. Tag

330931

Beweisen Sie, daß es unendlich viele Stammbrüche gibt, die sich als Summe zweier voneinander verschiedener Stammbrüche darstellen lassen!

Hinweis: Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

330932

Für jede positive ganze Zahl n denke man sich nach folgender Vorschrift eine weitere Zahl n' gebildet:

Aus der Zifferndarstellung von n im Dezimalsystem wird die erste Ziffer weggenommen und stattdessen hinter die letzte Ziffer angefügt. Dann sei n' die Zahl mit der entstandenen Zifferndarstellung.

Untersuchen Sie, ob es eine durch 7 teilbare Zahl n gibt, für die $n' = n : 7$ gilt!

330933

Antje hat in einem älteren Geometriebuch folgende Näherungskonstruktion für regelmäßige Vielecke mit gegebener Seitenlänge s gefunden:

Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge s. Dann konstruiere man den Mittelpunkt D von AB und verlängere die Strecke DC über C hinaus. Auf dieser Verlängerung trage man fortgesetzt Strecken der Länge $\frac{s}{6}$ ab. Die dabei der Reihe nach erhaltenen Punkte seien mit $M_7, M_8, M_9, \ldots$ bezeichnet. Für $n > 6$ ist dann jeweils der durch A und B gehende Kreis um M_n näherungsweise der Umkreis eines regelmäßigen n-Ecks der Seitenlänge s_n.

Beate behauptet, speziell für $n = 12$ gelte das nicht nur näherungsweise, sondern sogar genau. Beweisen Sie diese Behauptung!

alpha 2/94 S. 21 ff

2. Tag

330934

$$\begin{array}{rl} & \text{Z W E I} \\ + & \text{D R E I} \\ \hline = & \text{F Ü N F} \end{array}$$

Das obenstehende „Kryptogramm“ stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, daß als Anfangsziffer (für Z, D und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

a) Geben Sie eine Lösung an!

b) Untersuchen Sie, ob es mehr als fünf Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweis: Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

330935

Ermitteln Sie alle positiven ganzen Zahlen n mit der Eigenschaft, daß die drei Zahlen $n + 1$, $n + 10$ und $n + 55$ einen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben!

330936

Man beweise, daß für jedes konvexe Viereck $ABCD$ die folgende Aussage gilt:

Sind M_1, M_2, M_3, M_4 die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA und M_5, M_6 die Mittelpunkte der Diagonalen AC, BD, so gehen die drei Strecken M_1M_3, M_2M_4 und M_5M_6 durch einen gemeinsamen Punkt.

Hinweis: Ein Viereck ist genau dann konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als 180° sind.

33. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 9
1. Tag

330931 Lösung: 6 Punkte

Für den geforderten Beweis genügt es, ein Beispiel unendlich vieler natürlicher Zahlen a,b,c anzugeben (so zu charakterisieren, daß die Existenz unendlich vieler ersichtlich ist) und für sie $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ sowie $a \neq b$ zu bestätigen. Solche Beispiele sind etwa:

1.) Für alle $n = 1,2,3,\ldots$ gilt $\frac{1}{3n} + \frac{1}{6n} = \frac{1}{2n}$.

2.) Für alle $n = 2,3,4,\ldots$ gilt $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}$.

3.) Für alle $u,v > 0$ mit $u \neq v$ gilt $\frac{1}{u(u+v)} + \frac{1}{v(u+v)} = \frac{1}{uv}$.

Bemerkung: Zum Finden solcher a, b, c kann man z.B. (ausgehend von dem Gedanken, daß a und b größer als c sein müssen) die gewünschte Gleichung in der Form $\frac{1}{c+p} + \frac{1}{c+q} = \frac{1}{c}$ ansetzen, diese Gleichung aus $c(c+q) + c(c+p) = (c+p)(c+q)$ und dies aus $c^2 = pq$ erhalten, was unter der Bedingung $p \neq q$ zu erfüllen ist.
Eine Wiedergabe von solchen heuristischen Angaben (oder auch von Äquivalenzbetrachtungen) wird nicht vom Schüler verlangt.

330932 Lösung: 7 Punkte

In der Zifferndarstellung jeweils einer positiven ganzen Zahl n bezeichne z die erste Ziffer, ferner sei k die Anzahl der auf z folgenden Ziffern. Die durch diese k Ziffern dargestellte Zahl sei m. Mit diesen Bezeichnungen gilt $n = z \cdot 10^k + m$ sowie $n' = 10m + z$; und die Eigenschaft $n' = n:7$ liegt vor, wenn

$$10m + z = (z \cdot 10^k + m):7 \ ,$$
$$70m + 7z = z \cdot 10^k + m \ ,$$
$$69m = z \cdot (10^k - 7) \qquad (1)$$

gilt. Daß eine Ziffer z und positive ganze Zahlen k, m existieren, für die (1) gilt, kann z.B. folgendermaßen gezeigt werden: Wählt man $z = 1$, so besteht die Zifferndarstellung der Zahl $z \cdot (10^k - 7)$ aus k-1 Ziffern 9, gefolgt von einer Ziffer 3. Kann man nun zum Dividieren einer solchen Zahl durch 69 mit dem bekannten Divisionsverfahren die Anzahl k-1 der Ziffern 9 so groß wählen, daß erst dann die Ziffer 3 berücksichtigt werden muß, wenn bei einem Teilschritt des Verfahrens der Rest 48 vorkam, so erhält man mit dem nächsten Schritt (483:69 = 7) den Rest 0 ; d.h., dann ist (1) mit einer positiven ganzen Zahl m (dem Ergebnis der Division) erfüllbar. Die folgende Rechnung zeigt, daß dies zutrifft:

99999999999999999993 : 69 = 14492753623188405797
309
 339
  639
   189
    519
     369
      249
       429
        159
         219
          129
           609
            579
             279
              399
               549
               669
                483

Damit ist die Existenz einer Zahl n mit n' = n:7 nachgewiesen.

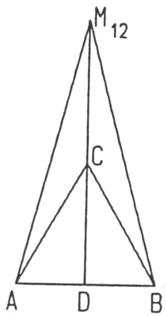
Bemerkungen: 1. Im so berechneten Beispiel wurde $k = 21$ gefunden; damit ergibt sich $n = 1014492753623188405797$. Man beachte die Ziffer 0 vor der oben angegebenen Ziffernfolge 144... ; sie muß wegen $n = 10^{21} + m$ auftreten (oder sie ergibt sich, indem man das Divisionsverfahren mit dem Teilschritt 9:69 beginnt und somit zur Zifferndarstellung 0144... für m kommt).
2. Die Eigenschaft n' = n:7 kann durch Ausrechnen bestätigt werden: Es gilt 1014492753623188405797 : 7 = 144927536231884057971 . Wurde der geforderte Beweis (wie oben) so geführt, daß *aus* der Erfüllbarkeit von (1) *auf das Vorliegen der Eigenschaft* n' = n:7 *geschlossen* wird, so ist eine solche Probe (zwar nützlich, aber) zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe nicht erforderlich; bereits eine explizite Angabe von n wird ja im Aufgabentext nicht gefordert.
Wurde dagegen nur (was nicht verlangt ist) *aus der Annahme, die Eigenschaft* n' = n:7 *liege vor, auf* Werte *geschlossen*, die (1) erfüllen, so muß für sie dann noch n' = n:7 bestätigt werden. Gemäß dem Aufgabentext würde sogar genügen, ein n anzugeben und n' = n:7 zu bestätigen.
3. Die Ermittlung von z, k, m mit (1) kann (im Beispiel für z = 1) auch so erfolgen: Durch schrittweises Multiplizieren mit 10 und Reduzieren modulo 69 berechnet man $10^2 = 100 \equiv 31$, $10^3 \equiv 310 \equiv 34$, $10^4 \equiv 340 \equiv 64$, ... usw., bis ein k mit $10^k \equiv 7$ gefunden ist. Freilich sind diese Rechenschritte im wesentlichen mit denen des obigen Divisionsverfahrens identisch.
4. Weitere Beispiele (für z = 1) erhält man, wenn man k wie genannt (Divisionsrest 48 bzw. $10^k \equiv 7$), aber *nicht kleinstmöglich*, wählt. Es ergeben sich Ziffernfolgen mit periodischen Wiederholungen.
5. Es gibt auch Beispiele für alle z = 2,...,9 . Sie können analog wie die für z = 1 ermittelt werden. Bei den durch 3 teilbaren Ziffern z = 3,6,9 kann man auch erst (1) durch 3 dividieren und dann das analoge Verfahren mit einer Division durch 23 verwenden. Man kann auch aus einem n mit z = 1 durch Multiplikation mit einem anderen z = 2,...,9 ein n mit dieser Anfangsziffer finden.

L 9.I

Etwa für z = 8 kann so n = 8115942028985507246376 erhalten werden. Zugleich zeigt dieses Beispiel, daß sich in der Ziffernfolge für m die Anfangsziffer 0 (siehe oben 1.) vermeiden läßt. Eine Berücksichtigung dieser Diskussion der Anfangsziffer 0 wird nicht vom Schüler verlangt.

330933 Lösung:

6 Punkte



Im gleichseitigen Dreieck ABC ist die Seitenhalbierende CD zugleich Winkelhalbierende, daher gilt $\overline{\measuredangle ACD} = 30°$. Nach Konstruktion ist ferner $\overline{CM_{12}} = s = \overline{CA}$, aus[1] dem Basiswinkelsatz und dem Außenwinkelsatz für das Dreieck $AM_{12}C$ folgt daher

$$\overline{\measuredangle AM_{12}C} = \overline{\measuredangle M_{12}AC} = \frac{1}{2}\,\overline{\measuredangle ACD} = 15°. \qquad (1)$$

Im Dreieck ABC ist CD auch Mittelsenkrechte; auf ihrer Verlängerung liegt M_{12}, also ist auch das Dreieck ABM_{12} mit $\overline{AM_{12}} = \overline{BM_{12}}$ gleichschenklig und somit $M_{12}D$ darin Winkelhalbierende. Aus (1) folgt damit[2] $\overline{\measuredangle AM_{12}B} = 30° = \frac{1}{12}\cdot 360°$.

In dem durch A und B gehenden Kreis k um M_{12} ist folglich $\measuredangle AM_{12}B$ zugehöriger Zentriwinkel zu derjenigen Sehnenlänge s, die als Seitenlänge eines regelmäßigen Zwölfecks mit k als Umkreis auftritt.

---

[1] Siehe die folgende Fußnote.

[2] Anstelle des Beweiswegs über (1) kann man auch so argumentieren: Da A, B, M_{12} auf einem Kreis um C liegen, ist $\measuredangle AM_{12}B$ Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $\measuredangle$ ACM und daher halb so groß wie dieser.

Vorschläge zur Punktverteilung:

330931

Beschreibung unendlich vieler Tripel (a,b,c)	3
Nachweis der geforderten Stammbruchzerlegung	3
	6

330932

Zurückführung auf eine geeignete Aussage, z.B. (1)	3
Existenznachweis für (m,k in (1) und damit für) n	4
	7

330933

Nutzbare Teilaussage, z.B. (1) oder die Einsicht, daß $\measuredangle AM_{12}B$ Peripheriewinkel zu $\measuredangle$ ACB ist	3
Abschließende Bestätigung von $\measuredangle AM_{12}B$ als Zentriwinkel zum Zwölfeck	3
	6

33. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 9
2. Tag

<u>330934 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Es genügt zu a) bzw. zu b), eine Lösung bzw. sechs Lösungen (z.B. aus der folgenden Aufzählung aller Lösungen mit Z < D und W < R) anzugeben oder - bei Angabe von weniger als sechs dieser Lösungen - auf ausreichend viele Möglichkeiten des *Vertauschens von* Z *mit* D *und - hiervon unabhängig - von* W *mit* R hinzuweisen:

1069	1073	1092	1092	1243	1254	1254	1293	1293	
7469	5873	3592	3692	5743	7354	7654	4793	5493	
8538	6946	4684	4784	6986	8608	8908	6086	6786	
1328	1329	1364	2059	2079	2134	2139	2153	2154	2193
4728	6729	7564	6359	6379	5934	6439	4753	6754	4593
6056	8058	8928	8418	8458	8068	8578	6906	8908	6786
2309	2419	2439	2508	2609	3164	3209	3259	3509	
6409	5619	5639	3908	5709	5764	5409	4759	4709	
8718	8038	8078	6416	8318	8928	8618	8018	8218	

<u>330935 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

I. Wenn n eine Zahl der gesuchten Art ist, so folgt:

Es gibt eine ganze Zahl $t > 1$ (1)

sowie positive ganze Zahlen u, v [und w][1] mit

$$n + 1 = t \cdot u \,, \quad (2)$$
$$n + 10 = t \cdot v \quad (3)$$

[und $n + 55 = t \cdot w$][1]. Aus (2), (3) und (1) ergibt sich

$$t \cdot (v-u) = 9 \quad (4)$$

sowie

$$v - u > 0 \,. \quad (5)$$

Wegen (4),(5),(1) muß t eine der beiden Zahlen 3 , 9 sein. Nach (2) gilt daher eine der Gleichungen $n = 3u-1$, $n = 9u-1$; also ist n jedenfalls mit einer positiven ganzen Zahl q von der Form

$$n = 3 \cdot q - 1 \,. \quad (6)$$

II. Wenn n von der Form (6) mit ganzzahligem $q > 0$ ist, so ist n eine positive ganze Zahl, und die drei Zahlen

$$n + 1 = 3 \cdot q \,,$$
$$n + 10 = 3q + 9 = 3 \cdot (q + 3) \,,$$
$$n + 55 = 3q + 54 = 3 \cdot (q + 18)$$

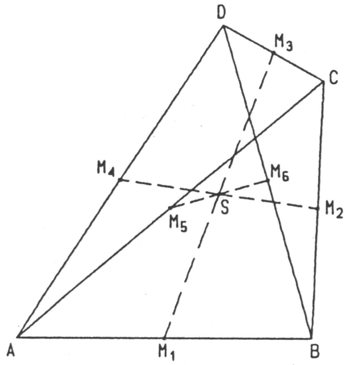
haben den gemeinsamen Teiler 3.

Die gesuchten Zahlen sind daher genau die Zahlen der Form (6), (d.h. alle diejenigen positiven ganzen Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 2 lassen).

---

[1] Die Angaben in eckigen Klammern brauchen im obigen Beweisteil I nicht herangezogen zu werden.

330936 Lösung: 7 Punkte



Es gilt $M_1M_2 \parallel AC$ (1)

und $\overline{M_1M_2} = \frac{1}{2}\,\overline{AC}$. (2)

Um dies zu beweisen, sei etwa[1)] D derjenige Punkt, für den CABD ein Parallelogramm ist. Darin halbieren die Mittelparallelen und die Diagonalen sich gegenseitig; die Parallele durch M_1 zu AC geht folglich durch M_2 , womit (1) gezeigt ist, und die so erhaltene Strecke M_1M_2 hat als halbe Mittelparallele die Länge (2).

Ebenso erhält man $M_4M_3 \parallel AC$ (3)

und $\overline{M_4M_3} = \frac{1}{2}\,\overline{AC}$. (4)

Aus (1),(2),(3),(4) folgt:

$M_1M_2M_3M_4$ ist ein Parallelogramm. (5)

In gleicher Weise folgt:

$M_1M_6M_3M_5$ ist ein Parallelogramm.[2)] (6)

In beiden Parallelogrammen habieren die Diagonalen einander, also gehen M_2M_4 und M_5M_6 beide durch den Mittelpunkt von M_1M_3 , womit der geforderte Beweis erbracht ist.

---

1) Die hier heranzuziehende Aussage, daß in jedem Dreieck die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten halb so lang wie die dritte Seite und zu dieser parallel ist, kann entweder als bekannter Sachverhalt zitiert oder in verschiedener Weise bewiesen werden. Die oben beschriebene Verwendung von Sätzen über Parallelogramme kann auch als Nutzung von Eigenschaften der Punktspiegelung an M_2 (180°-Drehung um M_2) gefaßt werden. Möglich ist auch die mehr „klassische" Herleitung durch Zerlegung von ABC in vier kongruente Dreiecke oder mit Hilfe des Strahlensatzes und seiner Umkehrung.

2) Da A und C nicht auf derselben Seite der Geraden durch M_1 , M_3 liegen, ist (anders als für das Parallelogramm $M_1M_2M_3M_4$) für $M_1M_6M_3M_5$ auch der „Grenzfall" möglich, daß M_5 und (dann wegen $M_1M_5 \parallel BC \parallel M_3M_6$ auch) M_6 auf M_1M_3 liegen, woraus sogleich ohne weitere Zwischenschritte die zu beweisende Aussage folgt.

Vorschläge zur Punktverteilung:

330934

a) Aufweis einer Lösung 3

b) Aufweis (durch explizite Angabe oder ausreichende Charakterisierung z.B. mit Tauschmöglichkeiten) von sechs Lösungen 4

7

330935

Zurückführung z.B. auf eine Faktorzerlegung wie (4) 3

Schluß auf mögliche Fälle, etwa zusammengefaßt in (6) 3

Bestätigung des gemeinsamen Teilers (gegebenenfalls in vorangehenden Beweisteilen mit erbracht) 1

7

330936

(Wiederholt) nutzbare Teilaussagen, etwa (1),(2) 3

Weiter nutzbare Aussage, z.B. Feststellung zweier Parallelogramme mit gemeinsamer Diagonale 2

Abschließender Nachweis des gemeinsamen Punktes 2

7