verlauft

33. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe
Aufgaben
Olympiadeklasse 9

__Hinweis:__ *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

__330921__

Multipliziert man eine dreistellige natürliche Zahl mit 7, so entsteht eine Zahl, die auf die Ziffern ...638 endet.
Wie heißt die dreistellige Zahl?

__330922__

Zum Mahlen einer Getreidemenge können zwei Mahlwerke A und B eingesetzt werden. Jedes Mahlwerk bewältigt in gleichen Zeiten gleiche Mengen.

Wenn man zunächst 8 Stunden lang nur mit dem Mahlwerk A mahlen würde und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 18 Stunden benötigen, bis die gesamte Getreidemenge bewältigt ist. Würde aber zunächst 10 Stunden lang nur mit A gemahlen und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 15 Stunden benötigen, bis die gesamte Menge bewältigt ist.

Wie lange wird es dauern, die gesamte Menge zu bewältigen, wenn A und B von Anfang an zusammen eingesetzt werden?

__330923__

$$\begin{array}{rccccc} & & M & O & R & D \\ + & & R & A & U & B \\ \hline = & K & R & I & M & I \end{array}$$

Das nebenstehende „Kryptogramm" stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, daß als Anfangsziffer (für M, R und K) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

a) Geben Sie eine Lösung an!

b) Beweisen Sie, daß es mindestens 15 Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweise: 1. Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

2. Die Ähnlichkeit des Buchstabens O mit der Ziffer 0 (Null) soll keine Bedeutung haben; d.h., der Buchstabe O darf auch durch eine von Null verschiedene Ziffer ersetzt werden.

330924

Beweisen Sie, daß für jedes nicht gleichschenklige Dreieck ABC die folgende Aussage gilt!

Ist X der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von BC mit der Winkelhalbierenden durch A und ist Y der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AC mit der Winkelhalbierenden durch B, so liegen die vier Punkte A, B, X, Y auf einem gemeinsamen Kreis.

L 9

33. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 9

<u>330921 Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

Sind a,b,c die Ziffern der gesuchten Zahl, so folgt:
Das Produkt $c\cdot 7$ endet auf die Ziffer 8. Daher muß $c = 4$ sein, und wegen $4\cdot 7 = 28$ entsteht der Übertrag 2 in die Zehnerstelle. Berücksichtigt man dies, so muß das Produkt $b\cdot 7$ auf $3 - 2 = 1$ enden. Also muß $b = 3$ sein, und mit $3\cdot 7 + 2 = 23$ entsteht der Übertrag 2 in die Hunderterstelle. Folglich muß das Produkt $a\cdot 7$ auf $6 - 2 = 4$ enden; daher folgt $a = 2$.
Die gesuchte Zahl heißt also 234.

<u>Bemerkung:</u> Eine Probe, d.h. Bestätigung, daß die Zahl $234\cdot 7$ auf die Ziffern ...638 endet, ist (nützlich, aber) zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe nicht erforderlich, da die Existenz einer gesuchten Zahl dem Aufgabentext entnommen werden kann.

<u>330922 Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

Mahlt A in jeder Stunde die Menge a und B in jeder Stunde die Menge b, so folgt: Die gesamte Menge beträgt $8a + 18b$, sie beträgt aber auch $10a + 15b$. Daher gilt

$$8a + 18b = 10a + 15b ,$$

also

$$3b = 2a , \qquad (1)$$

und die gesamte Menge beträgt

$$8a + 6\cdot 3b = 8a + 6\cdot 2a = 20a . \qquad (2)$$

Wenn A und B zusammen die gesamte Menge in x Stunden bewältigen, so beträgt diese Menge auch $x\cdot(a + b)$. Wegen (1) gilt aber $a + b = a + \frac{2}{3}a = \frac{5}{3}a$, also ist diese Menge auch gleich $x\cdot\frac{5}{3}a$. Hiernach und wegen (2) gilt

$$x\cdot\frac{5}{3}a = 20a ,$$

$$x = \frac{20\cdot 3}{5} = 12 .$$

Die gesamte Menge wird folglich von A und B zusammen in 12 Stunden bewältigt.

<u>Bemerkungen:</u> <u>1.</u> Es gibt *andere Lösungsansätze*; z.B. kann man die Stundenzahlen p bzw. q, die A bzw. B für die gesamte Menge benötigen würden, als Variable einführen. In 8 Stunden schafft A dann den Bruchteil $\frac{8}{p}$ der gesamten Menge usw.; es folgt das Gleichungssystem $\frac{8}{p} + \frac{18}{q} = 1$, $\frac{10}{p} + \frac{15}{q} = 1$ mit der Lösung $p = 20$, $q = 30$.
Also schaffen A und B in jeder Stunde zusammen $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{12}$ der gesamten Menge, sie benötigen daher 12 Stunden.

2. Auch zu dieser Aufgabe ist eine Probe nützlich, aber nicht erforderlich, da die Existenz der gesuchten Stundenzahl dem Aufgabentext entnommen werden kann. Eine Probe kann etwa so lauten: Wenn (wie im Lösungstext gefunden) von A bzw. B in jeder Stunde $a = \frac{1}{20}$ bzw. $b = \frac{1}{30}$ der gesamten Menge bewältigt werden, so sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt; denn es gilt $\frac{8}{20} + \frac{18}{30} = 1$ und $\frac{10}{20} + \frac{15}{30} = 1$. Außerdem ist dann die Angabe $x = 12$ mit $\frac{12}{20} + \frac{12}{30} = 1$ bestätigt.

3. Bei dieser Aufgabe ist sogar der *Ansatz* möglich, *die Eindeutigkeit dem Aufgabentext zu entnehmen*; damit genügt es, für *vermutete* Angaben, etwa für $a = \frac{1}{20}$, $b = \frac{1}{30}$ bzw. $p = 20$, $q = 30$ und somit für $x = 12$, *nur* (wie eben in der Probe) *zu bestätigen*, daß die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden.

330923 Lösung: 10 Punkte

a) Eine Lösung ist beispielsweise mit der Ersetzung gegeben, die

$$\text{von}\quad \begin{array}{r} \text{M O R D} \\ +\ \text{R A U B} \\ \hline =\text{K R I M I} \end{array} \quad\text{zu}\quad \begin{array}{r} 9\,2\,3\,4 \\ +\ 3\,8\,5\,6 \\ \hline =1\,3\,0\,9\,0 \end{array} \quad\text{führt.}$$

b) Man kann die Ziffern für D und B miteinander vertauschen, ebenso, unabhängig hiervon, die Ziffern für O und A und auch, unabhängig von den zuvor genannten Tauschmöglichkeiten, die Ziffern für R und U. So erhält man insgesamt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Lösungen, von denen keine zwei einander gleich sind. In jeder dieser Lösungen kann man die Ziffern für O und D sowie gleichzeitig die Ziffern für A und B miteinander vertauschen. Das ergibt 8 weitere Lösungen, insgesamt also 16 Lösungen, von denen keine zwei einander gleich sind.

Bemerkung: Es läßt sich zeigen, daß weitere Lösungen nicht existieren.

330924 Lösung: 10 Punkte

(Abb. L 330924:) Für den Umkreismittelpunkt M des Dreiecks ABC gilt: In dem mit $\overline{BM} = \overline{CM}$ gleichschenkligen Dreieck BCM ist die Mittelsenkrechte von BC zugleich Winkelhalbierende durch M. Für ihren Schnittpunkt X' mit dem nicht durch A gehenden Bogen BC des Umkreises von ABC gilt also $\overline{\measuredangle BMX'} = \overline{\measuredangle CMX'}$. Da zu gleichgroßen Zentriwinkeln des Umkreises auch gleichgroße Peripheriewinkel gehören, folgt $\overline{\measuredangle BAX'} = \overline{\measuredangle CAX'}$ Also ist AX' die durch A gehende Winkelhalbierende des Dreiecks ABC.

Daher fällt X' mit dem in der Aufgabe genannten Punkt X zusammen; d.h., der Umkreis von ABC geht durch den Punkt X. Ebenso folgt: Der Umkreis geht durch Y. Damit ist der verlangte Beweis erbracht.

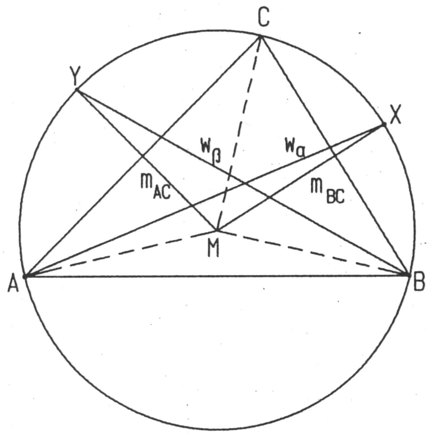

Abb. L 330924

Vorschläge zur Punktverteilung:

330921
Ermittlung einer Ziffer 4
Ermittlung der weiteren Ziffern: je 3 Pkte. 6
10

330922
Gewinnung von Aussagen wie (1) oder Gleichungen für p,q 4
Fortsetzung z.B. zu a+b = 5a/3 oder zu p=20, q=30 3
Abschließende Ermittlung der Stundenzahl 12 3
10

330923
a) Angabe einer Lösung 3
b) Gewinnung (oder Beschreibung der Gewinnungsmöglichkeit) weiterer Lösungen, etwa: Finden der 4 Tauschmöglichkeiten / Schluß auf 16 Lösungen (5 Pkte./ 2 Pkte.) 7
Falls nur Lösungen angegeben werden, aber weniger als 15, sind für b) maximal 4 Punkte zu vergeben.
10

330924
Herleitung einer ersten weiterverwendbaren Aussage, z.B. $\overline{\sphericalangle BMX' = \sphericalangle CMX'}$ für den Schnittpunkt X' des Umkreises mit der Mittelsenkrechten von BC 4
Weiterer Schluß, z.B.: AX' halbiert den Winkel ∡ BAC 3
Abschließende Beweisführung (im Beispiel: X'=X , X liegt auf dem Umkreis, ebenso Y) 3
10