33. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe
Aufgaben
Olympiadeklasse 8
1. Tag

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

<u>330841</u>

Max arbeitet zur Vorbereitung auf die Mathematik-Olympiade eine Anzahl Aufgaben durch. Seinem Freund Moritz, der ihn fragt, wieviele von diesen Aufgaben er schon gelöst habe und wieviele noch nicht, antwortet er:

„Die Anzahl der gelösten Aufgaben ist um 22 größer als die Anzahl der nicht gelösten Aufgaben. Addiert man zur Anzahl der gelösten Aufgaben die dreifache Anzahl der nicht gelösten Aufgaben, so erhält man eine Zahl, die kleiner als 60 ist. Addiert man aber zur Anzahl der gelösten Aufgaben ein Drittel der Anzahl der nicht gelösten Aufgaben, so ergibt sich eine ganze Zahl, die größer als 30 ist."

Untersuche, ob durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wieviele Aufgaben Max bearbeitet und wieviele er davon gelöst hat! Ist das der Fall, so gib diese Anzahlen an!

330842

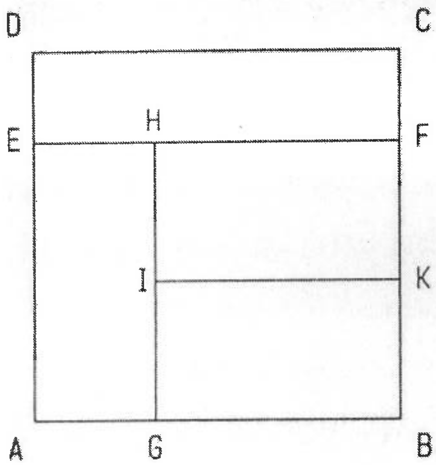

Abb.A 330842

Es sei ABCD ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a. Eine Parallele zu AB schneide die Seiten AD und BC in E bzw. F, eine Parallele zu AD schneide die Strecken AB und EF in G bzw. H, eine Parallele zu AB schneide die Strecken GH und BC in I bzw. K (siehe Abb.A 330842).

a) Außer diesen Voraussetzungen soll die Bedingung erfüllt werden, daß die vier Rechtecke EFCD, AGHE, GBKI und IKFH untereinander flächengleich sind. Ermittle unter dieser Bedingung den Umfang des Rechtecks IKFH in Abhängigkeit von a !

b) Anstelle der in a) genannten Bedingung soll nun die Bedingung erfüllt werden, daß die vier Rechtecke EFCD, AGHE, GBKI, IKFH untereinander umfangsgleich sind. Ermittle unter dieser Bedingung den Flächeninhalt des Rechtecks IKFH in Abhängigkeit von a !

330843

Auf einer Ecke eines Würfels der Kantenlänge 1 cm sitzt eine Ameise. Längs jeder Kante des Würfels ist 1 Gramm Honig verteilt. Die Ameise soll zum Endpunkt derjenigen Körperdiagonale gelangen, an deren Anfangspunkt sie sich befindet. Sie soll hierzu einen Weg von genau 7 cm Länge zurücklegen und dabei genau 7 Gramm Honig naschen.

Ermittle die Anzahl aller Wege, die unter diesen Bedingungen möglich sind!

33. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe
Aufgaben
Olympiadeklasse 8
2. Tag

330844

Für ein Dreieck seien folgende Bedingungen gefordert:

(1) Alle drei Seitenlängen des Dreiecks haben, in Zentimetern gemessen, ganzzahlige Maßzahlen.

(2) Der Umfang des Dreiecks beträgt 50 cm.

Ermittle die größtmögliche Anzahl von Dreiecken, die diese Forderungen erfüllen und unter denen sich keine zwei zueinander kongruenten Dreiecke befinden!

330845

Für jedes rechtwinklige Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C bezeichne D den Schnittpunkt von AB mit der Winkelhalbierenden durch C. Der Abstand, den der Punkt D von einer der beiden Katheten hat, werde mit t bezeichnet. Die Längen der Katheten seien a und b.

Beweise, daß für jedes rechtwinklige Dreieck mit diesen Bezeichnungen die Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t}$ gilt!

330846

Untersuche, ob es ein Paar natürlicher Zahlen größer als Null gibt, deren Produkt genau zehnmal so groß wie ihre Summe ist! Wenn dies der Fall ist, ermittle alle derartigen Zahlenpaare!

33. Mathematik-Olympiade, 4. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 8
1. Tag

<u>330841 Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Aus den Angaben folgt: Wenn Max x Aufgaben gelöst hat, so hat er x-22 Aufgaben nicht gelöst; es gilt

$$x + 3\cdot(x-22) < 60 \;, \qquad (1)$$

$$x + \frac{1}{3}\cdot(x-22) > 30 \;, \qquad (2)$$

und $x + \frac{1}{3}\cdot(x-22)$ ist eine ganze Zahl. (3)

Aus (1) folgt $x + 3x - 66 < 60$, $4x < 126$, $x < 31\frac{1}{2}$;

aus (2) folgt $x + \frac{1}{3}x - \frac{22}{3} > 30$, $\frac{4}{3}x > \frac{112}{3}$, $x > 28$.

Daher ist x eine der Zahlen 29, 30, 31 und folglich x-22 eine der Zahlen 7, 8, 9. Die Bedingung (3) erfordert, daß x-22 durch 3 teilbar ist; dies wird unter den genannten Zahlen nur von x-22 = 9 erfüllt.

Also ist durch die Angaben eindeutig bestimmt: Max hat x = 31 Aufgaben gelöst von insgesamt 31+9 = 40 bearbeiteten Aufgaben.

<u>Bemerkung:</u> Als Probe kann man bestätigen: Es waren 31-9 = 22 gelöste Aufgaben mehr als nicht gelöste, es gilt $31+3\cdot 9 = 58 < 60$ und $31 + \frac{1}{3}\cdot 9 = 34 > 30$. Eine solche Probe ist (zwar nützlich, aber) zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe nicht erforderlich, da (aus dem Aufgabentext die Existenz von gesuchten Anzahlen hervorgeht und) nur ein Eindeutigkeitsnachweis verlangt wurde.

<u>330842 Lösung:</u> <u>a) 3 Punkte, b) 4 Punkte</u>

a) Wegen der zu erfüllenden Bedingung hat jedes der vier Rechtecke EFCD, AGHE, GBKI, IKFH den Flächeninhalt $\frac{1}{4}a^2$. Daraus folgt

$\overline{ED} = \frac{1}{4}a^2 : a = \frac{1}{4}a$, $\overline{AE} = a - \frac{1}{4}a = \frac{3}{4}a$, $\overline{AG} = \frac{1}{4}a^2 : \frac{3}{4}a = \frac{1}{3}a$,

$\overline{GB} = \overline{IK} = a - \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a$, $\overline{GI} = \overline{IH} = \frac{1}{4}a^2 : \frac{2}{3}a = \frac{3}{8}a$. Der Umfang des Rechtecks IKFH beträgt somit $2\cdot\left(\overline{IK}+\overline{IH}\right) = 2\cdot\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{8}\right)a = \frac{25}{12}a$.

b) Für die Längen $\overline{ED} = \overline{FC} = x$ und $\overline{AG} = y$ folgt aus der Umfangsgleichheit von EFCD mit AGHI, daß $2\cdot(a+x) = 2\cdot(y + a-x)$, also $y = 2x$ gilt. Wegen der Umfangsgleichheit von GBKI mit IKFH ist ferner $2\cdot\left(\overline{IK}+\overline{BK}\right) = 2\cdot\left(\overline{IK}+\overline{KF}\right)$, also $\overline{BK} = \overline{KF} = \frac{1}{2}(a-x)$. Die Umfangsgleichheit von EFCD mit GBKI ergibt daher die Gleichung $2\cdot(a+x) = 2\cdot\left(a-y + \frac{1}{2}(a-x)\right)$, also $2a + 2x = 2a - 4x + a - x$,

$7x = a$. Somit erhält man $x = \frac{1}{7}a$, $y = \frac{2}{7}a$, $\overline{IK} = a-y = \frac{5}{7}a$, $\overline{KF} = \frac{1}{2}(a-x) = \frac{3}{7}a$; das Rechteck IKFH hat den Flächeninhalt $\overline{IK}\cdot\overline{KF} = \frac{15}{49}a^2$.

2.Lösungsweg zu b): Wählt man $\overline{ED} = \frac{1}{7}$ a und $\overline{AG} = \frac{2}{7}$ a , so haben alle vier Rechtecke EFCD, AGHE, GBKI, IKFH den Umfang $\frac{16}{7}$ a . Eine andere Möglichkeit, die Bedingung b) zu erfüllen, gibt es nicht; denn vergrößert man ED, so muß man (damit AGHI denselben Umfang wie EFCD erhält) auch AG vergrößern, und damit verkleinern sich die Umfänge der beiden (durch Halbierung von BF umfangsgleich gemachten) Rechtecke GBKI, IKFH; ebenso würde eine Verkleinerung von ED zur Vergrößerung dieser beiden Umfänge führen.

330843 Lösung: 7 Punkte

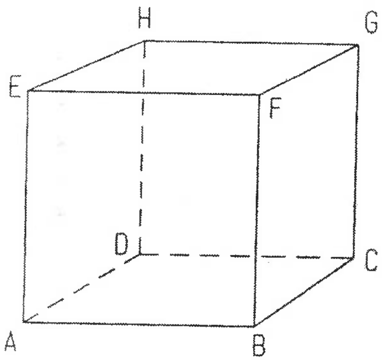

Abb.L 330843

I. Die Ecken des Würfels seien wie in Abb.L 330843 mit A,B,C,D,E,F,G,H bezeichnet. Der Anfangspunkt der abzuzählenden Wege sei A, der Endpunkt folglich G. Von A aus kann eine erste Kante nur entweder nach B oder D oder E gegangen werden. Es genügt, eine dieser Möglichkeiten, etwa die nach B, zu betrachten und die Anzahl der hiermit beginnenden Wege mit 3 zu multiplizieren.

II. Von B aus kann eine zweite Kante nur entweder nach C oder F folgen. Es genügt, etwa die für die Fortsetzung nach C gefundene Anzahl mit 2 zu multiplizieren. Von C aus gibt es wieder genau zwei Fortsetzungsmöglichkeiten:

III. Setzt man von C aus nach G fort, so ist man bereits nach einem Weg von 3 cm Länge im Zielpunkt. Also hat man noch einen Weg der Länge 4 cm von G nach G anzuschließen. Das ist nur durch Umlaufen einer Seitenfläche möglich. Die einzige G enthaltende Seitenfläche, bei der dies ohne Wiederholung einer schon durchlaufenen Kante möglich ist, ist GHEF. Daher kommt man (nach dem Beginn über C, G) genau zu den 2 Wegen ABCGHEFG und ABCGFEHG.

IV. Von C aus nach D gibt es genau die beiden Fortsetzungen:

a) Anfangsweg ABCDH. Von H aus dann sofort nach G zu gehen, wäre nicht möglich, da man danach auf einem Weg von 2 cm wieder nach G kommen müßte, was ohne Kantenwiederholung nicht möglich ist. Also verbleibt nur der Weg ABCDHEFG.

b) Anfangsweg ABCDA. Von A aus geht es eindeutig nach E. Von dort aus ist auf einem Weg von 2 cm nach G zu gelangen. Hierzu gibt es genau zwei Möglichkeiten; so erhält man die beiden Wege ABCDAEFG und ABCDAEHG.

Die Anzahl der in III. und IV. gefundenen fünf Wege ist nach I. und II. mit 3 und 2 zu multiplizieren. So ergibt sich: Die Anzahl der Wege, die unter den Bedingungen der Aufgabe möglich sind, beträgt $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

Vorschläge zur Punktverteilung:

330841

Herleitung weiterverwendbarer Ungleichungen, z.B. für x-22 3
Nutzung der Ganzzahligkeit 2
Abschließende Ermittlung der gesuchten Anzahlen 1
6

330842 a)

Ermittlung von (z.B.) zwei verwendbaren Streckenlängen 2
Abschließende Ermittlung des gesuchten Umfangs 1
3

330842 b)

Erster Ermittlungsabschnitt (z.B.: Beziehung zwischen zwei geeignet eingeführten Unbekannten, etwa $y = 2x$) 2
Abschließende Ermittlung des gesuchten Flächeninhaltes 2
4

330843

Gewinnung möglicher Wege (durch konkrete Angabe oder unter [teilweiser] Nutzung von Symmetrie wie in I. und II.) 4
Nachweis der Vollständigkeit der so gewonnenen Wege 3

(Diese beiden zu bewertenden Aspekte können unterschiedlich „verteilt" im Lösungstext berücksichtigt sein.)
7

330844 Lösung: 7 Punkte

Sind a, b, c mit $a \geq b \geq c$ die ganzzahligen Maßzahlen dreier Streckenlängen, so sind diese Längen genau dann die Seitenlängen eines Dreiecks, wenn $a < b+c$ gilt. Zusammen mit der Bedingung (2) besagt diese Ungleichung $2a < a+b+c = 50$, $a < 25$. Aus $a \geq b \geq c$ folgt andererseits $3a \geq a+b+c > 48$, $a > 16$. Daher kann a nur eine der Zahlen 17, 18, ..., 24 sein.
In der folgenden Tabelle werden zu jeder dieser Zahlen a alle diejenigen Paare (b,c) aufgesucht, mit denen die Gleichung $b+c = 50-a$ und die Ungleichungen $a \geq b \geq c$ gelten: Man beginnt mit $b = a$ (und folglich $c = 50 - 2a$), dann stellt man fest, ob durch Verkleinern von b um 1 und gleichzeitiges Vergrößern von c um 1 ein weiteres derartiges Paar (b,c) entsteht; dies ist so lange der Fall, bis die Bedingung $b \geq c$ nicht mehr erfüllt wird. Anschließend wird in der Tabelle die Anzahl der gefundenen Paare vermerkt.

a	b+c = 50-a	Paare (b,c)	Anzahl
17	b+c = 33	(17,16)	1
18	b+c = 32	(18,14),(17,15),(16,16)	3
19	b+c = 31	(19,12),(18,13),(17,14),(16,15)	4
20	b+c = 30	(20,10),(19,11), ..., (16,14),(15,15)	6
21	b+c = 29	(21, 8),(20, 9), ..., (16,13),(15,14)	7
22	b+c = 28	(22, 6),(21, 7), ..., (15,13),(14,14)	9
23	b+c = 27	(23, 4),(22, 5), ..., (15,12),(14,13)	10
24	b+c = 26	(24, 2),(23, 3), ..., (14,12),(13,13)	12

Damit enthält die Tabelle für jedes Dreieck der geforderten Art die Maßzahlen seiner Seitenlängen a,b,c. Wie ersichtlich ist, gibt es unter diesen Angaben auch keine zwei, die (wegen Übereinstimmung in allen drei Zahlen a,b,c) zu kongruenten Dreiecken führen würden.
Die gesuchte Anzahl beträgt somit $1+3+4+6+7+9+10+12 = 52$.

330845 Lösung: 6 Punkte

Für jedes rechtwinklige Dreieck gilt mit den eingeführten Bezeichnungen: Jeder Punkt der Winkelhalbierenden des rechten Winkels, also auch der Punkt D, hat gleichgroße Abstände zu den beiden Katheten. Daher haben die beiden Dreiecke BCD und ACD die Flächeninhalte $\frac{1}{2}a\cdot t$ bzw. $\frac{1}{2}b\cdot t$. Aus diesen beiden Dreiecken ist das Dreieck ABC zusammengesetzt. Da es rechtwinklig ist, also die Höhe auf einer Kathete die andere Kathete ist, ist sein Flächeninhalt $\frac{1}{2}a\cdot b$. Daher gilt $a\cdot t + b\cdot t = a\cdot b$; Division durch $a\cdot b\cdot t$ ergibt, wie behauptet, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t}$.

330846 Lösung: 7 Punkte

Für natürliche Zahlen $x > 0$, $y > 0$ folgt aus der Bedingung

$$xy = 10\cdot(x+y)\,, \qquad (1)$$

daß $xy = 10\cdot(x+y) > 10y$, also $x > 10$ gilt; ebenso folgt $y > 10$. Also ist (1) nur erfüllbar, wenn

$$x = 10+u\,,\ y = 10+v \qquad (2)$$

mit natürlichen Zahlen $u > 0$, $v > 0$ gilt. Hierfür ist (1) gleichbedeutend mit

$$(10+u)(10+v) = 10\cdot(20+u+v) ,$$
$$100 + 10u + 10v + uv = 200 + 10u + 10v ,$$
$$uv = 100 .$$

Dies gilt genau dann, wenn $(u;v)$ eines der Paare

$$(1;100) , (2;50) , (4;25) , (5;20) , (10;10) ,$$
$$(20;5) , (25;4) , (50;2) , (100;1)$$

ist; also werden die Bedingungen der Aufgabe genau von den Paaren

$$\left.\begin{matrix}(11;110) , (12;60) , (14;35) , (15;30) , (20;20) , \\ (30;15) , (35;14) , (60;12) , (110;11) .\end{matrix}\right\} \quad (3)$$

erfüllt.

Bemerkungen zu <u>anderen Lösungsdarstellungen:</u> <u>1.</u> Wird der Übergang von (1) zu (3) nicht als in einem Gang erhaltene *Äquivalenz*, sondern nur als *Schluß von* (1) *auf* (3) formuliert, so ist anschließend der umgekehrte Schluß auszuführen. Dies kann z.B. in Gestalt einer *Probe* geschehen: Alle Paare in (3) sind Paare positiver natürlicher Zahlen, und wegen

$$11\cdot110=1210=10\cdot(11+110), \quad 12\cdot60=720=10\cdot(12+60),$$
$$14\cdot35=490=10\cdot(14+35), \quad 15\cdot30=450=10\cdot(15+30), \quad 20\cdot20=400=10\cdot(20+20)$$

erfüllen sie auch (1).

<u>2.</u> Man kann aus (1) auch Schlüsse ziehen, ohne mit der Herleitung von $x > 10$, $y > 10$ und der Darstellung (2) zu beginnen: Wegen $(x - 10)\cdot y = 10x$ und $x \neq 0$ folgt $x - 10 \neq 0$ und dann $y = \frac{10x}{x - 10}$ $= \frac{10x - 100}{x - 10} + \frac{100}{x - 10} = 10 + \frac{100}{x - 10}$. Also ist $x - 10$ ein Teiler von 100, erfüllt (wegen $(x - 10)\cdot y = 10x$ und $x > 0$, $y > 0$) die Ungleichung $x - 10 > 0$ und ist folglich eine der Zahlen

$$1,2,4,5,10,20,25,50,100.$$

<u>Vorschläge zur Punktverteilung:</u>

<u>330844</u>

Gewinnung möglicher Seitenlängen-Tripel (oder von Anzahlen solcher Tripel)	4
Nachweis der Vollständigkeit	3
(Wie in 330843 können diese Aspekte unterschiedlich „verteilt" auftreten.)	7

<u>330845</u>

Zum Beweis nutzbare Aussagen (z.B.: Flächeninhalte von BCD, ACD, ABC oder z.B.: A,D sind Ecken eines Quadrates der Seitenlänge t)	4
Abschließende Herleitung der zu beweisenden Gleichung	2
	6

<u>330846</u>

Wesentlicher Herleitungsschritt (z.B.: $u\cdot v = 100$ oder $(x-10)\mid100$)	4
Gewinnung aller Lösungen	3
	7