33. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 8

1. Tag

330831 Lösung: 6 Punkte

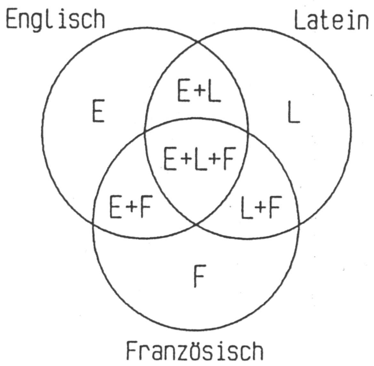

Abb. L 330831 a

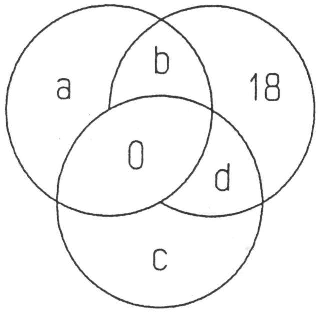

Abb. L 330831 b

In Abb. L 330831 a sind die Schüler, die Englisch, Latein bzw. Französisch lernen, durch je einen Kreis zusammengefaßt. Außerdem sind dort die möglichen Sprachenzusammenstellungen ersichtlich. Die Angaben in Abb. L 330831 b bezeichnen die Schülerzahlen hierzu. Aus (3) und (5) folgen insbesondere die Eintragungen 18 und 0. Berücksichtigt man sie, so folgt weiter:

Wegen der Gesamtzahl 120 gilt $a + b + c + d + 18 = 120$, (6)
wegen (1) gilt $a + b + d + 18 = 102$, (7)
wegen (2) gilt $c + b + d + 18 = 75$, (8)
[wegen (4) gilt $b = 9 + d$. (9)][1]

Aus (6) und (7) folgt $c = 18$, (10)
aus (6) und (8) folgt $a = 45$. (11)
Damit erhält man aus (7) oder (8) $b + d = 39$. (12)

Die gewünschten Zahlenangaben sind also eindeutig bestimmt; sie lauten:

Genau eine der drei Sprachen lernen insgesamt $a+c+18 = 81$ Schüler,
genau zwei der drei Sprachen lernen insgesamt $b+d = 39$ Schüler.

---

[1] Diese Angabe ist zum obigen Lösungsweg nicht erforderlich.

<u>Bemerkungen:</u> Aus (9) und (12) kann man auch b und d einzeln ermitmitteln, doch ist dies (bei obigem Vorgehen) zur Lösung der Aufgabe nicht erforderlich. Ebenfalls nicht vom Schüler gefordert ist natürlich die Verwendung von Mengendiagrammen; nur kann ohne sie ein Bedarf an umständlicheren Erklärungen auftreten.

Als Probe kann (auch nach der erwähnten Ermittlung von b und d) bestätigt werden, daß mit den genannten Werten 18, 0, a, b, c, d alle Aussagen (1)-(5) zutreffen und die Gesamtzahl 120 vorliegt. Eine solche Probe ist (zwar nützlich, aber) zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe nicht erforderlich, da die Existenz von Anzahlen, mit denen diese Bedingungen erfüllt werden, dem Aufgabentext entnommen werden kann.

<u>330832 Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

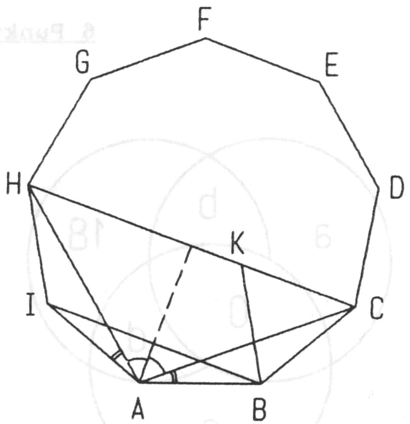

Abb. L 330832

a) Nach Voraussetzung ist

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AI} = \overline{IH}\,, \qquad (1)$$

ferner gilt für die Innenwinkel im regelmäßigen Neuneck[1)]

$$\overline{\sphericalangle ABC} = \overline{\sphericalangle AIH} = \overline{\sphericalangle IAB} = 140^\circ. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\Delta ABC \cong \Delta AIH\,,$$

also $\overline{\sphericalangle BAC} = \overline{\sphericalangle IAH}$ (3)

und $\overline{CA} = \overline{HA}$.

Im somit gleichschenkligen Dreieck CHA ist die Höhe auf CH zugleich Winkelhalbierende von $\sphericalangle$ CAH. Wegen (3) halbiert sie auch $\sphericalangle$ BAI und ist daher auch im gleichschenkligen Dreieck BIA die Höhe auf BI. Da BI und CH also auf derselben Geraden senkrecht stehen, sind sie zueinander parallel.

---

1) Die Gradzahl 140°, die erst zu b) gebraucht wird, kann als bekannter Sachverhalt zitiert oder z.B. so bewiesen werden: Ist M der Mittelpunkt des - als bekannt zu zitierenden - Umkreises, so gilt $\overline{\sphericalangle AMB} = 360^\circ : 9 = 40^\circ$, im gleichschenkligen Dreieck ABM also $\overline{\sphericalangle ABM} = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$. Ebenso folgt $\overline{\sphericalangle CBM} = 70^\circ$ und damit (2).
Ohne Verwendung des Umkreises kann auch so geschlossen werden: Das Neuneck kann in 9 Dreiecke ABZ,BCZ,...,IAZ (Z ein beliebiger innerer Punkt) zerlegt werden. Die Summe seiner Innenwinkel ist also $9 \cdot 180^\circ - 360$; also beträgt jeder der 9 gleichen Innenwinkel $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

b) Für den Schnittpunkt K von CH mit der Parallelen durch B zu IH gilt: Im Parallelogramm IBKH ist

$$\overline{KH} = \overline{BI} \qquad (4)$$

und $\overline{BK} = \overline{IH}$, nach (1) also auch

$$\overline{BK} = \overline{BC} \, . \qquad (5)$$

Nach dem Innenwinkelsatz für das gleichschenklige Dreieck BIA gilt wegen (2) ferner

$$\overline{\measuredangle\ BIA} = \frac{1}{2}(180^\circ - 140^\circ) = 20^\circ,$$

also nochmals wegen (2)

$$\overline{\measuredangle\ BIH} = 140^\circ - 20^\circ = 120^\circ.$$

Als Gegenwinkel im Parallelogramm IBKH hat dann auch $\measuredangle$ BKH die Größe 120°, somit gilt

$$\overline{\measuredangle\ BKC} = 60^\circ. \qquad (6)$$

Nach (5) und (6) ist das Dreieck BCK gleichseitig. Damit und wegen (4) ergibt sich $\overline{BC} = \overline{CK} = \overline{CH} - \overline{KH} = \overline{CH} - \overline{BI}$, w.z.b.w.

<u>330833 Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

a) Man erhält p, indem man an die Strecke BC im Punkt B nach derjenigen Seite, auf der A nicht liegt, nochmals den Winkel der Größe $\beta = 75^\circ$ anträgt. Entsprechend erhält man q durch nochmaliges Antragen von 55° an AC (siehe Abb. L 330833 a)). Für den Schnittpunkt D von p und q gilt damit $\overline{\measuredangle\ ABD} = 180^\circ - 2\cdot75^\circ = 30^\circ$ und $\overline{\measuredangle\ BAD} = 180^\circ - 2\cdot55^\circ = 70^\circ$. Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABD folgt: p und q schneiden sich unter einem Winkel der Größe $\delta = \overline{\measuredangle\ ADB} = 180^\circ - 30^\circ - 70^\circ = 80^\circ$.

b) Wie in a) ergibt sich $\overline{\measuredangle\ ABD} = 180^\circ - 2\beta$, $\overline{\measuredangle\ BAD} = 70^\circ$, also $\delta = 180^\circ - (180^\circ - 2\beta) - 70^\circ$ (siehe Abb. L 330833 b)). Da nun $\delta = 90^\circ$ gefordert wird, folgt $2\beta = 90^\circ + 70^\circ$, also $\beta = 80^\circ$.

c) Für $\beta = 35^\circ$ bilden p und q jeweils nach der Seite hin, auf der C liegt, mit u Winkel der Größe $2\cdot35^\circ$ bzw. $2\cdot55^\circ$ (siehe Abb. L 330833 c)). Da diese sich zu 180° ergänzen, sind p und q für den genannten Wert $\beta = 35^\circ$ als zueinander parallel nachgewiesen.

d),e) Abb.L330833d),e) zeigt je eine Zeichnung der verlangten Art.

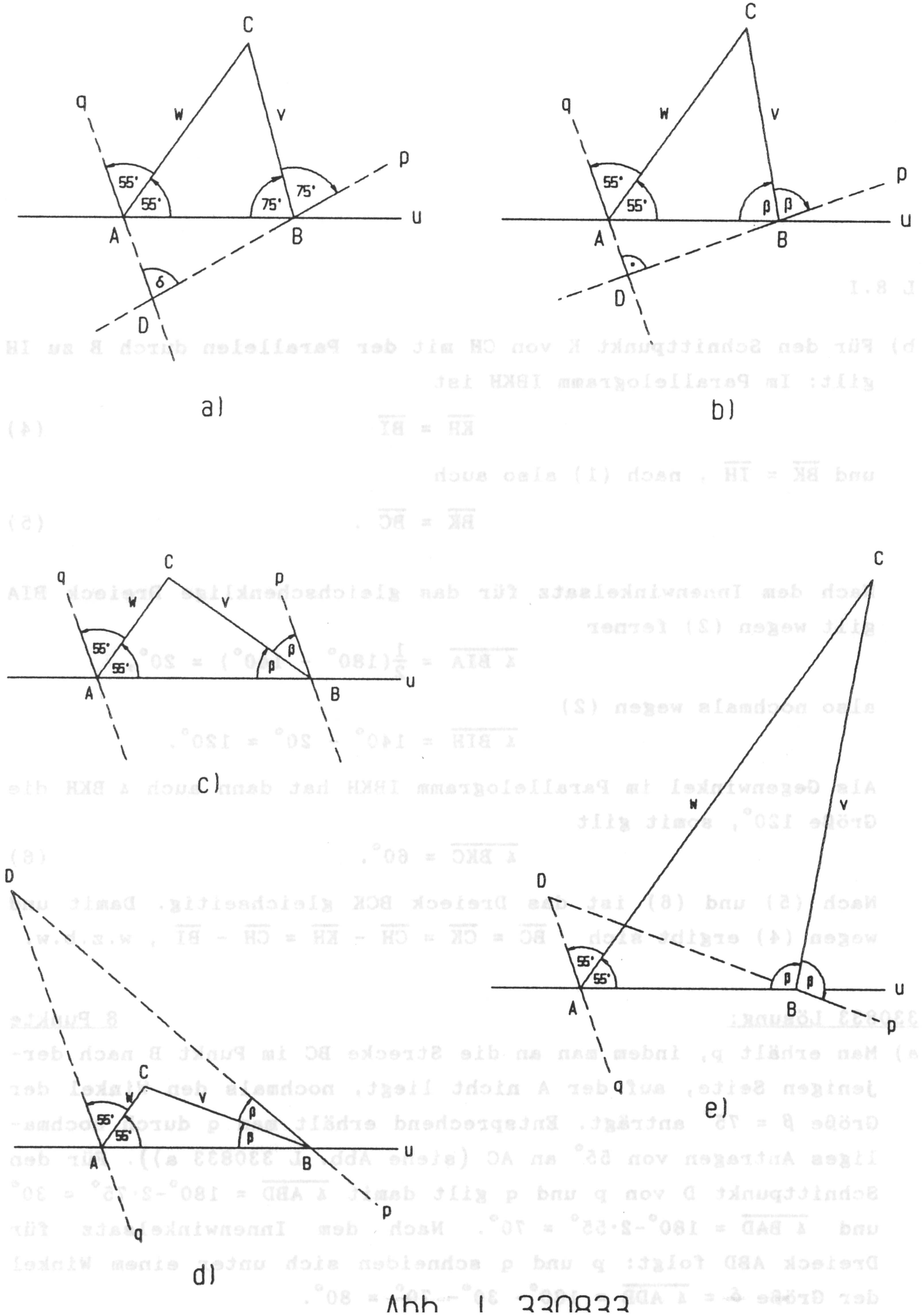

Abb. L 330833

Vorschläge zur Punktverteilung:

330831

Ermittlung einer ersten Anzahl, z.B. c = 18 2
" " zweiten " , Schluß auf a+c+18 = 81 2
Schluß auf b+d = 39 2

6

330832

a) Nutzbare Teilaussage (z.B. Übereinstimmung der Höhe auf CH mit den Winkelhalbierenden von $\sphericalangle$ CAH und $\sphericalangle$ BAI) 2
Abschließender Nachweis von BI $\parallel$ CH 1
b) Nutzbare Teilaussage (z.B. Größe von $\sphericalangle$ BIH) 2
Abschließender Nachweis der behaupteten Gleichung 1

6

330833

a) Nutzbare Teilaussage, z.B. Innenwinkel im Dreieck ABD bei A und B 1
Abschließende Ermittlung von δ 1
b) Ermittlung von β 1
c) Angabe von β und Nachweis von p $\parallel$ q 2
d) Zeichnung der verlangten Art 1
e) " " " " 1

7

33. Mathematik-Olympiade, 3. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 8
2. Tag

330834 Lösung: 7 Punkte

Da X in der Zeit $\frac{1}{2}$ h bis zum ersten Treffen den Weg $\frac{15}{2}$ km zurücklegte, fuhr X mit der Geschwindigkeit 15 $\frac{km}{h}$.

Wären X und Y beim zweiten Treffen einander entgegengefahren, so hätte X zwischen dem ersten und zweiten Treffen B erreichen und dort die Richtung wechseln müssen, also wäre die Strecke vom ersten Treffpunkt bis B kürzer als $\frac{15}{2}$ km . Daher hätte Y eine kleinere Geschwindigkeit als X und hätte somit in der zweiten halben Stunde noch nicht einmal A erreichen, also erst recht nicht wenden und X begegnen können.

Daher gibt es nur zwei Möglichkeiten:

I. In der Zeit $\frac{1}{2}$ h vom ersten bis zum zweiten Treffen war X nochmals $\frac{15}{2}$ km in gleicher Richtung weitergefahren und wurde am Ende dieser Zeit von Y eingeholt (der zuvor A erreicht und dort die Richtung gewechselt hatte).

Das besagt: Y mußte in dieser Zeit eine 3 mal so lange Strecke durchfahren und hat somit die Geschwindigkeit $3 \cdot 15 \frac{km}{h} = 45 \frac{km}{h}$.
Ferner folgt: Y hatte vom Start an bis zum ersten Treffen einen 3 mal so langen Weg wie X zurückgelegt. Also hat die Strecke AB insgesamt die Länge $4 \cdot \frac{15}{2}$ km = 30 km .

II. Zwischen dem ersten und zweiten Treffen ist X in B angekommen, hat dort die Richtung gewechselt und dann beim zweiten Treffen Y eingeholt.

Der Ablauf der Begegnungen ist wie im Fall I., nur mit vertauschten Rollen von X und Y. Also hat nun X eine 3 mal so große Geschwindigkeit wie Y, d.h.: Y hat die Geschwindigkeit 5 $\frac{km}{h}$. Dementsprechend ergibt sich auch, daß die Länge von AB im Fall I. einen 3 mal so großen Wert hatte wie im Fall II.; d.h., im Fall II. hat AB die Länge 10 km .

330835 Lösung: 6 Punkte

a) Für die Anordnung der drei Ziffern 2, 5, 7 gibt es genau sechs Möglichkeiten; dementsprechend sind alle „Spiegelzahlen" der genannten Art die Zahlen 257752, 275572, 527725, 572275, 725527 und 752257. Als ihre Summe ergibt sich s = 3111108 . Die kleinste natürliche Zahl, die größer als 1 und Teiler von s ist, ist 2. Daher ist die Zahl $\frac{s}{2}$ = 1555554 Teiler von s, kleiner als s und zugleich die größte Zahl mit diesen beiden Eigenschaften, also der größte echte Teiler von s.

b) Entsprechend gilt für je drei Ziffern a, b, c, von denen keine zwei einander gleich sind: Um mit dem üblichen Additionsverfahren die Summe der im Aufgabentext genannten „Spiegelzahlen" zu bilden, hat man beim Addieren an allen sechs Stellen (Einer-, Zehner-, ..., Hunderttausenderstelle) die Zahl $z = 2\cdot a + 2\cdot b + 2\cdot c$ zu bilden. Daher beträgt diese Summe

$$z + 10\cdot z + 10^2\cdot z + 10^3\cdot z + 10^4\cdot z + 10^5\cdot z = 111111\cdot z$$

und ist folglich durch 111111 teilbar.

330836 Lösung: 7 Punkte

a) Für den Flächeninhalt F des Dreiecks ABC gilt

$$F = \frac{1}{2}\, b\cdot h_b = \frac{1}{2}\, c\cdot h_c ,$$

also
$$b = \frac{c\cdot h_c}{h_b} = \frac{6\cdot 5}{2}\ \text{cm} = 15\ \text{cm} .$$

b) Angenommen, es gäbe ein solches Dreieck. Für seinen Flächeninhalt F müßte dann

$$F = \frac{1}{2}\, a\cdot h_a = \frac{1}{2}\, b\cdot h_b = \frac{1}{2}\, c\cdot h_c ,$$

also

$$a = \frac{2\cdot F}{4\ \text{cm}} , \quad b = \frac{2\cdot F}{2\ \text{cm}} , \quad c = \frac{2\cdot F}{5\ \text{cm}}$$

gelten. Daraus folgte

$$a + c = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\cdot\frac{2\cdot F}{1\ \text{cm}} = \frac{9}{20}\cdot\frac{2\cdot F}{1\ \text{cm}} < \frac{2\cdot F}{2\ \text{cm}} = b$$

im Widerspruch zur Dreiecksungleichung. Damit ist die eingangs gemachte Annahme als falsch nachgewiesen.

Vorschläge zur Punktverteilung:

330834

Geschwindigkeit von X	1
Ersichtliches Auffinden der zwei möglichen Fälle	1
In einem Fall: Geschwindigkeit von Y, Länge von AB	3
In dem anderen Fall: " " " "	2
	7

330835

a) Auffinden der „Spiegelzahlen"	2
Ermittlung der Summe und des größten echten Teilers	2
b) Nachweis der genannten Teilbarkeit	2
	6

330836

a) Ermittlung von b	3
b) Nutzbare Teilaussagen, z.B. a,b,c durch F ausgedrückt	2
Widerlegung der Existenz eines Dreiecks mit den gegebenen Längen als Höhenlängen	2
	7