Umlauft

A 8

33. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe

Aufgaben

Olympiadeklasse 8

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

330821

Zu Beginn einer Feier waren insgesamt anwesend: Genau viermal so viele Frauen wie Männer. Nachdem vier Ehepaare die Feier verlassen hatten, waren genau fünfmal so viele Frauen wie Männer auf der Feier.

Wieviele Personen waren insgesamt zu Beginn auf der Feier gewesen?

330822

Susann läßt sich je eine natürliche Zahl von Xaver, Yvonne und Zacharias sagen. Sie teilt ihnen dann die Summe dieser drei Zahlen mit. Jeder multipliziert die mitgeteilte Summe mit der ursprünglich von ihm genannten Zahl. So erhält Xaver das Ergebnis 240, Yvonne 270 und Zacharias 390.

Untersuche, ob hierdurch die drei ursprünglich genannten Zahlen eindeutig bestimmt sind! Ist dies der Fall, so gib diese Zahlen an!

330823

Es sei ABCD ein Quadrat, seine Seitenlänge sei a. Die Seite AB werde über B hinaus um die Länge a bis E verlängert, die Seite BC über C hinaus um die Länge a bis F, die Seite CD über D hinaus um a bis G, die Seite DA über A hinaus um a bis H.

a) Beweise aus diesen Voraussetzungen, daß EFGH ein Quadrat ist!

b) Wie oft ist der Flächeninhalt des Quadrates ABCD in dem Flächeninhalt von EFGH enthalten?

330824

Für jedes Dreieck ABC bezeichne H den Fußpunkt der auf BC senkrechten Höhe und W den Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden durch A.

a) Welche Größe muß der Winkel $\measuredangle$ WAH in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ haben, in dem der Innenwinkel $\measuredangle$ ACB die Größe 48° hat?

b),c) Gibt es gleichschenklige Dreiecke ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$, bei denen der Winkel $\measuredangle$ WAH

b) die Größe 12°,
c) die Größe 60°

hat? Ermittle jeweils alle diejenigen Werte, die als Größe des Basiswinkels $\measuredangle$ BAC in einem derartigen Dreieck möglich sind!

L 8

33. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 8

330821 Lösung: 8 Punkte

Waren zu Beginn genau x Männer auf der Feier, so waren genau 4x Frauen auf der Feier. Nachdem vier Ehepaare die Feier verlassen hatten, blieben genau x-4 Männer und 4x-4 Frauen. Für diese Anzahlen gilt folglich $5\cdot(x - 4) = 4x - 4$,

also $5x - 20 = 4x - 4$,

$$x = 16 .$$

Somit waren zu Beginn insgesamt 16 Männer und 64 Frauen, also 80 Personen auf der Feier gewesen.

Bemerkung: Da dem Aufgabentext entnommen werden kann, daß Anzahlen von Frauen und Männern wie genannt vorkamen, ist eine Probe nicht zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe erforderlich.

330822 Lösung: 10 Punkte

Sind x, y, z die drei ursprünglich genannten Zahlen und ist

$$s = x + y + z \qquad (1)$$

ihre Summe, so gilt

$$x\cdot s = 240 , \quad y\cdot s = 270, \quad z\cdot s = 390 . \qquad (2)$$

1.Fortsetzungsmöglichkeit: Indem man (1) mit s multipliziert und dann (2) anwendet, folgt

$$s^2 = x\cdot s + y\cdot s + z\cdot s = 240 + 270 + 390 = 900 .$$

Da s als Summe dreier natürlicher Zahlen selbst eine natürliche Zahl ist, ist hierdurch eindeutig bestimmt: Es gilt

$$s = 30 \qquad (3)$$

und damit nach (2)

$$x = 8 , \quad y = 9 , \quad z = 13 . \qquad (4)$$

2.Fortsetzungsmöglichkeit: Zerlegt man die in (2) genannten Zahlen in Primfaktoren

$$240 = 2^4\cdot 3\cdot 5 , \quad 270 = 2\cdot 3^3\cdot 5 , \quad 390 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 13 ,$$

so folgt: Da s nach (2) ein gemeinsamer Teiler dieser Zahlen ist, kann s keine anderen Primfaktoren als das Produkt $2\cdot 3\cdot 5 = 30$ enthalten. Wäre $s < 30$, so folgte aus (2), daß $x > 8$, $y > 9$, $z > 13$ sein müßte, im Widerspruch gegen (1). Damit verbleibt nur die Möglichkeit (3) und damit (4).

Bemerkung: Auch diese Aufgabe erfordert zu einer vollständigen Lösung keine Probe. (Ebenso wie bei 330821 ist freilich eine Probe als nützlich zu empfehlen.)

330823 Lösung: a): 5 Punkte, b): 5 Punkte

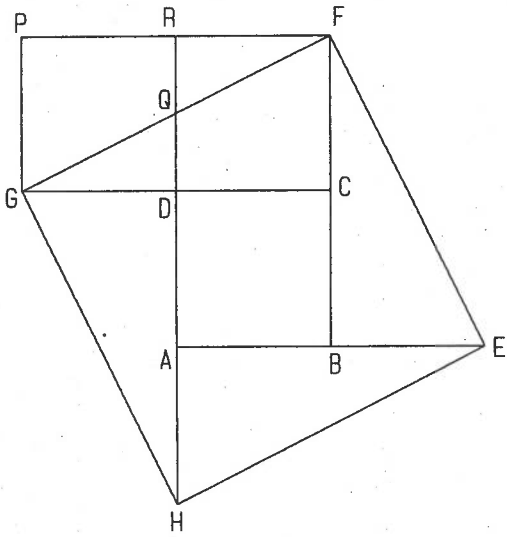

Abb. L 330823

a) Nach den Voraussetzungen ist

$$\overline{BE} = a = \overline{CF} \ ,$$
$$\overline{BF} = 2a = \overline{CG} \ ,$$

ferner (als Nebenwinkel von Innenwinkeln des Quadrates ABCD)

$$\overline{\measuredangle EBF} = 90^\circ = \overline{\measuredangle FCG} \ . \qquad (1)$$

Damit folgt nach dem Kongruenzsatz sws

$$\Delta\, BEF \cong \Delta\, CFG \ ,$$

also $\overline{EF} = \overline{FG}$ (2)

und $\overline{\measuredangle EFB} = \overline{\measuredangle FGC}$. (3)

Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck CFG sowie nach (1) ist ferner

$$\overline{\measuredangle FGC} + \overline{\measuredangle CFG} = 90^\circ \ ;$$

hieraus und aus (3) folgt

$$\overline{\measuredangle EFB} + \overline{\measuredangle CFG} = 90^\circ \ ,$$

d.h. $\overline{\measuredangle EFG} = 90^\circ$. (4)

Entsprechend zu (2) und (4) beweist man, daß im Viereck EFGH alle Seiten einander gleiche Länge und alle Winkel die Größe 90° haben. Also ist es ein Quadrat.

b) Es sei P derjenige Punkt, für den GCFP ein Rechteck ist. Die Verlängerung von AD über D hinaus schneide GF in Q und PF in R. Dann sind DCFR und GDRP zwei Quadrate mit gleicher Seitenlänge a wie ABCD. In den Dreiecken GDQ und FRQ sind gleichgroße Winkel bei D,R (rechte Winkel) und Q (Scheitelwinkel), daher und wegen $\overline{GD} = \overline{FR}$ sind sie nach Kongruenzsatz sww einander kongruent. Fügt man sie an das Viereck DCFQ an, so folgt: Das Dreieck GCF hat denselben Flächeninhalt wie das Quadrat DCFR, also auch wie ABCD. Entsprechendes gilt für die Dreiecke HDG, EAH, FBE. Also ist der Flächeninhalt von ABCD genau 5 mal in dem von EFGH enthalten.

L 8

Es gibt mehrere andere Lösungswege und -darstellungen. So kann man in b) den Flächeninhalt von GCF als $\frac{1}{2}\cdot\overline{GC}\cdot\overline{CF} = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a = a^2$ finden und zu a) mit dem Satz des Pythagoras $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\cdot\sqrt{5}$ sowie $\overline{EG} = \sqrt{a^2 + (3a)^2} = a\cdot\sqrt{10} = \overline{EF}\cdot\sqrt{2}$ erhalten. Daraus folgt $\overline{EF}^2 + \overline{FG}^2 = \overline{EG}^2$ und dann nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras $\overline{\measuredangle\, EFG} = 90^\circ$; also ist EFGH ein Quadrat. Seinen Flächeninhalt kann man nun auch vermittels $\left(a\cdot\sqrt{5}\right)^2 = 5\cdot a^2$ als das Fünffache des Flächeninhaltes von ABCD erweisen.

330824 Lösung: a): 4 Punkte, b): 4 Punkte, c): 4 Punkte

a) Nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz gilt

$$2\cdot\ \overline{\measuredangle\, BAC} + \overline{\measuredangle\, ACB} = 180^\circ,$$

also $\overline{\measuredangle\, BAC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\cdot\ \overline{\measuredangle\, ACB} = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ.$

Da AW den Winkel $\measuredangle$ BAC halbiert, gilt

$$\overline{\measuredangle\, BAW} = 33^\circ. \qquad (1)$$

Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABH ist

$$\overline{\measuredangle\, BAH} = 90^\circ - \overline{\measuredangle\, ABH} = 90^\circ - 66^\circ = 24^\circ. \qquad (2)$$

Der Winkel $\measuredangle$ ABC ist kleiner als 90°, also liegt H auf derselben Seite von AB wie W. Daher folgt aus (1) und (2)

$$\overline{\measuredangle\, WAH} = 33^\circ - 24^\circ = 9^\circ.$$

b) Wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ und $\overline{\measuredangle\, WAH} = 12^\circ$ ist, so folgt: Da der Basiswinkel $\measuredangle$ ABC kleiner als 90° ist, liegt H auf derselben Seite von AB wie W, also entweder auf der Strecke BW oder auf ihrer Verlängerung über W hinaus (siehe Abb. L 330824 a bzw. Abb. L 330824 b). In diesen beiden Fällen folgt mit dem oberen bzw. unteren Vorzeichen $\overline{\measuredangle\, BAH} = \overline{\measuredangle\, BAW} \mp \overline{\measuredangle\, WAH}$, mit $\alpha = \overline{\measuredangle\, BAC}$ also

$$\overline{\measuredangle\, BAH} = \frac{\alpha}{2} \mp 12^\circ. \qquad (3)$$

Somit besagt der Innenwinkelsatz für Dreieck ABH

$$\left(\frac{\alpha}{2} \mp 12^\circ\right) + \alpha = 90^\circ, \qquad (4)$$

$$\frac{3}{2}\alpha = 90^\circ \pm 12^\circ,$$

$$\alpha = 60^\circ \pm 8^\circ.$$

In der Tat gibt es sowohl für $\alpha = 68^\circ$ als auch für $\alpha = 52^\circ$ gleichschenklige Dreiecke mit α als Basiswinkelgröße (da in beiden Fällen $\alpha < 90^\circ$ ist); für diese Dreiecke gilt (4), also (3) und damit $\overline{\measuredangle\, WAH} = 12^\circ$.

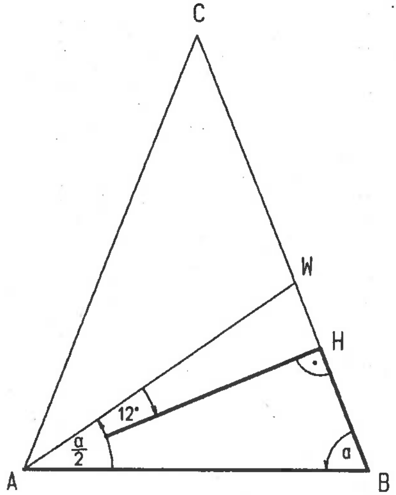

Abb. L 330824 a

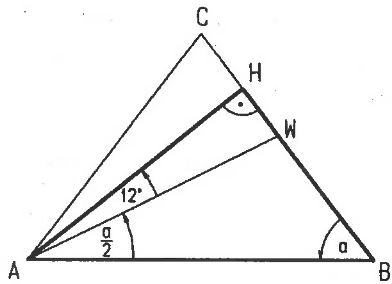

Abb. L 330824 b

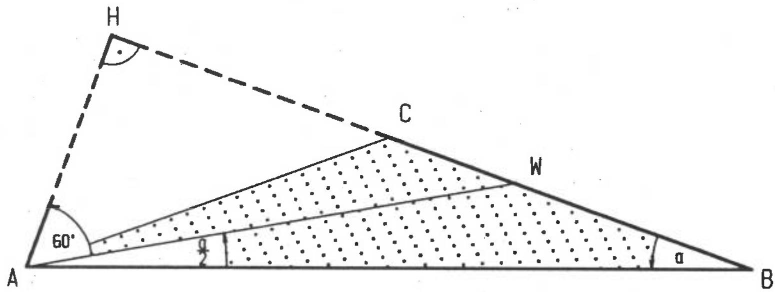

Abb. L 330824 c

c) Die gleiche Schlußweise wie in b) führt auf

$$\frac{3}{2}\alpha = 90^\circ \pm 60^\circ,$$

$$\alpha = 60^\circ \pm 40^\circ.$$

Von diesen beiden Werten scheidet $\alpha = 100^\circ$ aus, da ein Basiswinkel nicht größer als 90° sein kann. Dagegen gibt es für $\alpha = 20^\circ$ gleichschenklige Dreiecke mit α als Basiswinkelgröße (siehe Abb. L 330824 c);

L 8

für diese Dreiecke gilt[1)]

$$\overline{\measuredangle HAB} = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ,$$

also

$$\overline{\measuredangle HAW} = 70^\circ - \frac{1}{2}\cdot 20^\circ = 60^\circ.$$

Damit ist gezeigt: Es gibt Dreiecke wie in c) genannt; als Basiswinkelgröße $\alpha = \overline{\measuredangle BAC}$ solcher Dreiecke ist genau der Wert $\alpha = 20^\circ$ möglich.

<u>Vorschläge zur Punktverteilung:</u>

<u>330821</u>

Schluß auf eine weiterverwendbare Aussage (z.B. eine Gleichung für die Anzahl der zu Beginn anwesenden Männer)	4
Abschließende Ermittlung (z.B. durch Lösen der Gleichung) ...	4
	8

<u>330822</u>

Schluß auf weiterverwendbare Aussagen, je nach Umfang und weiterführendem Nutzen aufgeteilt etwa in (3 + 3) Pkte. (z.B.: Weg über (2) zu $s^2 = 900$ oder: Ermittlung und dann Nutzung der Primzerlegungen von 240, 270, 390)	6
Abschließende Ermittlung von x, y, z	4
	10

<u>330823 a)</u>

Nachweis einer Quadrat-Eigenschaft (z.B. Gleichheit zweier Seitenlängen)	3
Nachweis einer zweiten Eigenschaft und (zusammen mit Folgerungen aus der ersten, z.B. ein rechter Winkel zusammen mit Gleichheit aller Seiten) Schluß auf Quadrat	2
	5

<u>330823 b)</u>

Ersichtliche Wahl eines zum Ziel führenden Ermittlungsweges (Flächenbetrachtung eines der vier Dreiecke GCF,...,FBE oder Nutzung von $\overline{EF} = a\sqrt{5}$ und schon erfolgtem Beweis zu a))	2
Ausführung der Flächeninhaltsermittlung	3
	5

<u>330824 a)</u>

Ermittlung weiterverwendbarer Größen, z.B. $\overline{\measuredangle BAW}$, $\overline{\measuredangle BAH}$	3
Abschließende Ermittlung von $\measuredangle WAH$	1
	4

<u>330824 b)</u>

Hinführung zu den zwei Fällen	2
Ermittlung beider Werte von α	2
	4

<u>330824 c)</u>

Beginn (oder Verweis auf Beginn) wie in b)	1
Schluß auf Vorliegen genau eines Falles, Ermittlung von α ...	3
	4

---

1) Man kann auch analog wie in b) auf die zu (3) entsprechende (und nur mit dem unteren Vorzeichen genommene) Gleichung $\overline{\measuredangle BAH} = \frac{\alpha}{2} + 60^\circ$ verweisen.