Umlauf - Broschüre

A 6

33. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe
Aufgaben
Olympiadeklasse 6

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

330621

Von einem „Fest der Tiere" wird erzählt:

> Dort waren ebenso viele Storchenbeine wie Käfer, 90 Käferbeine mehr als Hasen, aber dreimal so viele Hasenbeine wie Störche.

Nenne Anzahlen der Störche, Hasen und Käfer, so daß die Erzählung stimmt! Überprüfe dies bei deinen Anzahlangaben!

(Die Tiere sollen alle nach dem Biologielehrbuch gebaut sein: Jeder Storch mit 2 Beinen, jeder Hase mit 4 Beinen, jeder Käfer mit 6 Beinen.)

330622

Man denke sich aus den fünf Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 alle verschiedenen Zahlen gebildet, die durch Anordnung dieser Ziffern in jeder möglichen Reihenfolge entstehen können. Welches ist die Summe aller dieser fünfziffrigen Zahlen?

330623

Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\overline{AC}$ = 5 cm , $\overline{BC}$ = 6 cm und dem rechten Winkel bei C ! Konstruiere weiter den Kreis k um C mit dem Radius 2,5 cm !

Nun soll eine Gerade g so gelegt werden, daß folgende Bedingung erfüllt wird: Wenn man das Dreieck ABC an g spiegelt und dabei das Dreieck A'B'C' erhält, so hat der Kreis k genau 3 gemeinsame Punkte (Schnitt- oder Berührungspunkte) mit diesem Dreieck, d.h. mit der Linie, die sich aus den drei Strecken A'B', B'C' und C'A' zusammensetzt.

Konstruiere eine solche Gerade g und überprüfe durch Konstruktion des durch Spiegelung entstehenden Dreiecks A'B'C', ob die Bedingung erfüllt ist!

Umlaufs - Broschüre

A 6

330624
In einer Schachtel sind Kugeln; jede von ihnen hat eine der Farben blau, gelb, rot. Von jeder Farbe sind mindestens 3, aber höchstens 7 Kugeln vorhanden. Die Anzahl aller Kugeln in der Schachtel ist eine Primzahl. Die Anzahl der roten Kugeln ist durch die Anzahl der gelben Kugeln teilbar. Nimmt man eine gelbe und zwei rote Kugeln heraus, so ist die Anzahl aller Kugeln in der Schachtel durch 5 teilbar, außerdem ist dann wieder die Anzahl der roten Kugeln in der Schachtel durch die Anzahl der gelben Kugeln in der Schachtel teilbar.
Wieviele Kugeln waren zu Anfang von jeder Farbe in der Schachtel?

Umlauft - Broschüre

L 6

33. Mathematik-Olympiade, 2. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 6

<u>330621 Lösung:</u> <u>9 Punkte</u>

Anzahlangabe: Es waren 8 Störche, 6 Hasen und 16 Käfer.

Überprüfen der Erzählung: Die 8 Störche haben 16 Beine, also ebenso viele, wie es Käfer gibt. Die 16 Käfer haben 96 Beine, also 90 mehr, als es Hasen gibt. Die 6 Hasen haben 24 Beine, das sind dreimal so viele, wie es Störche gibt.

<u>Bemerkungen:</u> Die Anzahlen können mit Hilfe der Gleichungen $k = 2s$, $h + 90 = 6k$, $3s = 4h$ gefunden werden, z.B. indem man rechnet: Es folgt $h + 90 = 6 \cdot 2s = 12s = 4 \cdot 3s = 4 \cdot 4h = 16h$, also $90 = 15h$, $h = 6$ und dann $6 + 90 = 6k$, $k = 16$ sowie $16 = 2s$, $s = 8$.

Man kann z.B. auch durch folgendes Probieren zu Anzahlen kommen: Es sind mehr als 90 Käferbeine, also mehr als 15 Käfer. Ein probeweises Ansetzen der Käferzahl 16 ergibt $16:2 = 8$ als Anzahl der Störche und $96-90 = 6$ (oder $3 \cdot 8:4 = 6$) als Anzahl der Hasen.

Die Wiedergabe eines solchen heuristischen Weges und erst recht die (beim Lösen des Gleichungssystems oder bei weiterem Probieren zu gewinnende) Einsicht, daß die Anzahlen eindeutig bestimmt sind, werden - gemäß dem Aufgabentext - nicht vom Schüler verlangt.

<u>330622 Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

Für jede Möglichkeit, als Einerziffer eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 zu wählen, gibt es so viele Zahlen, wie es Reihenfolge-Möglichkeiten der übrigen vier Ziffern gibt. Die Anzahl dieser Möglichkeiten beträgt 24. (Dies kann als bekannter Sachverhalt zitiert oder z.B. so gefunden werden: Für die erste dieser vier Ziffern hat man 4 Möglichkeiten, bei jeder von ihnen für die zweite Ziffer 3 Möglichkeiten, bei jeder der so entstandenen $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten gibt es 2 Reihenfolgen der letzten beiden Ziffern; also gibt es genau $12 \cdot 2 = 24$ Reihenfolgen für vier Ziffern.)

Als Summe der Einerziffern erhält man folglich

$$24 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 24 \cdot 15 = 360 .$$

Dasselbe gilt für die Summe der Zehner-, Hunderter-, Tausender- und Zehntausenderziffern. Daher ergibt sich dasselbe Ergebnis wie bei der folgenden Rechnung:

```
    360
   360
  360
 360
360
-------
3999960
```

L 6

Bemerkung: Korrekt (wenn auch zeitraubend) ist es natürlich auch, die 120 Summanden aufzuschreiben und zu addieren. Jedoch sollte die volle Punktzahl nur dann erteilt werden, wenn aus dem Lösungstext die Vollständigkeit der Summandenberücksichtigung ersichtlich ist. (Das gilt erst recht für begonnene und mit „usw." abgebrochene Aufzählungen.)

330623 Lösung: 10 Punkte

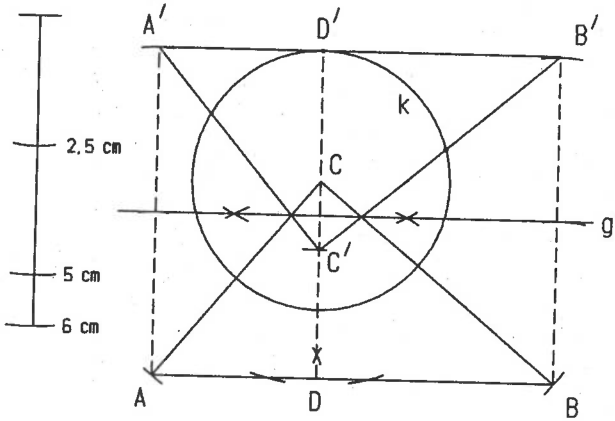
In Abb. L 330623 a und Abb. L 330623 b sind zwei mögliche Lösungen gezeigt.

Die dort jeweils verwendete Gerade g kann nach folgender Beschreibung konstruiert werden (eine solche Beschreibung wird nicht vom Schüler gefordert; gemäß dem allgemeinen Vorspanntext sollte aber grundsätzlich ersichtlich sein, daß g nicht etwa nur durch „ungefähres Einpassen" gewählt wurde, da die *genaue* Lage einer Ecke von A'B'C' auf k oder das *genaue* Berühren von k an eine Seite erforderlich ist):

a) Man konstruiert das Lot von C auf AB. Ist D sein Fußpunkt, so verlängert man DC über C hinaus bis zum Schnitt D' mit k. Dann konstruiert man g als die Mittelsenkrechte von DD'.

b) Man verlängert BC über C hinaus bis zum Schnitt B' mit k. Dann konstruiert man g als die Mittelsenkrechte von BB'.

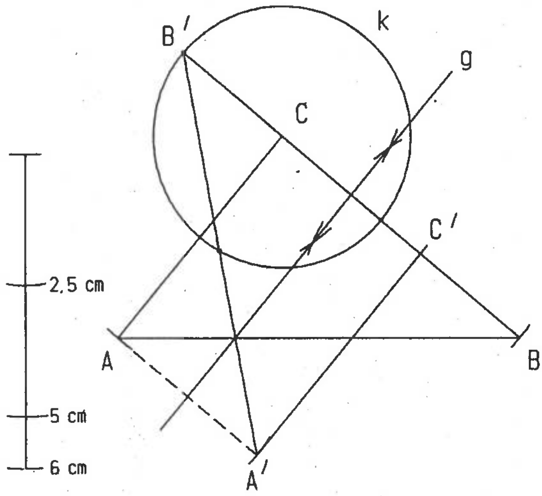
Abb. L 330623 a



Umlauft-Broschüre

L 6

Abb. L 330623 b



<u>330624 Lösung</u> <u>11 Punkte</u>

Für die Anzahlen b, g, r der blauen, gelben bzw. roten Kugeln gilt $9 \leq b+g+r \leq 21$, da jede der drei Zahlen b, g, r mindestens 3 und höchstens 7 beträgt. Da b+g+r eine Primzahl ist, kann dies nur eine der Zahlen 11, 13, 17, 19 sein. Nach dem Herausnehmen von einer gelben und zwei roten Kugeln verbleibt eine der Anzahlen 8, 10, 14, 16. Von ihnen ist nur 10 durch 5 teilbar; also mußte b+g+r = 13 sein.

Alle Möglichkeiten, 13 in drei Summanden zu zerlegen, die mindestens 3 und höchstens 7 betragen, sind

3+3+7 ,	$\boxed{4+3+6}$,	5+3+5 ,	6+3+4 ,	$\boxed{7+3+3}$,
3+4+6 ,	4+4+5 ,	$\boxed{5+4+4}$,	6+4+3 ,	
$\boxed{3+5+5}$,	4+5+4 ,	5+5+3 ,		
3+6+4 ,	4+6+3 ,			
3+7+3 .				

Nur bei den eingerahmten Zerlegungen ist der dritte Summand durch den zweiten teilbar. Verringert man in diesen Zerlegungen den zweiten Summanden um 1 und den dritten um 2, so entsteht

$$3+4+3 \quad , \quad \boxed{4+2+4} \quad , \quad 5+3+2 \quad , \quad 7+2+1$$

Nur bei der eingerahmten Zerlegung (entstanden aus der Zerlegung 4+3+6) ist der dritte Summand durch den zweiten teilbar.
Also waren zu Anfang 4 blaue, 3 gelbe und 6 rote Kugeln in der Schachtel.

Bemerkung: Da die Existenz von Anzahlen mit den genannten Eigenschaften dem Aufgabentext entnommen werden kann, ist eine Probe nicht zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe erforderlich.

Vorschläge zur Punktverteilung:

330621

Angabe der Zahlen und ersichtlich sinngemäßes Ansetzen des Überprüfens der Erzählung	3
Überprüfungen, je nach Aufwand gestaffelt etwa in 3+2+1	6
	9

330622

Ersichtliche Einsicht, daß in jeder Spalte (Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender) jede Ziffer 1,...,5 so oft vorkommt, wie es Reihenfolgen von 4 Ziffern gibt ...	3
Anzahl 24 solcher Reihenfolgen	2
Ermittlung der Summe 360 bei Addition in jeder Spalte	3
Abschließende Ermittlung der gesuchten Summe	2
	10

330623

Konstruktion von ABC und k	3
Ersichtliche Wahl einer Spiegelachse g, mit der die Anzahl 3 gemeinsamer Punkte von A'B'C' und k entsteht	3
Ausführung der Konstruktion von g und A'B'C'	4
	10

330624

Schluß auf b+g+r = 13	3
Ermittlung aller Tripel (b,g,r) mit b+g+r = 13 und g|r	5
Ermittlung des - unter diesen befindlichen - Tripels mit (g-1)|(r-2)	3
	11