32. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landes-Olympiade)
Olympiadeklassen 11-13, 1.Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

321231

Man untersuche, ob es eine positive ganze Zahl n gibt, für die die Zahl $\sqrt{n} + \sqrt{n+4}$ rational ist.

Hinweis: Als bekannter Sachverhalt kann die Aussage verwendet werden, daß für jede natürliche Zahl k, die keine Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{k}$ nicht rational ist.

321232

Man beweise: Zu jeder Primzahl p gibt es eine reelle Zahl c, mit der die Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,\ldots}$, die durch

$$a_1 = c ,$$
$$a_{k+1} = a_k^2 + c \quad (k = 1,2,3,\ldots)$$

definiert wird, periodisch ist und die Zahl p als kleinste Periodenlänge hat.

Hinweis: Eine Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,\ldots}$ heißt genau dann *periodisch*, wenn es eine positive ganze Zahl n gibt, mit der für alle k = 1,2,3,... die Gleichung $a_k = a_{k+n}$ gilt. Ist das der Fall, so heißt jede positive ganze Zahl n, mit der das zutrifft, eine *Periodenlänge* der Zahlenfolge $(a_k)_{k=1,2,3,\ldots}$.

Von den nachstehenden Aufgaben 321233A *und* 321233B *ist genau eine auszuwählen und zu lösen:*

321233 A

Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ und $x \neq 1$ definiert sind sowie für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$, $x^2 - x - 1 \neq 0$ und $x^2 + x - 1 \neq 0$ die folgende Gleichung (1) erfüllen:

$$2 \cdot f\left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x - 1}\right) - 3 \cdot f\left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x - 1}\right) = 5 \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right) . \qquad (1)$$

21233 B

ür jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ermittle man alle diejenigen -Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ positiver ganzer Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ie das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot (x_1 + x_2),$$

$$x_2 \cdot x_3 = 3 \cdot (x_2 + x_3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_{n-1} \cdot x_n = 3 \cdot (x_{n-1} + x_n),$$

$$x_n \cdot x_1 = 3 \cdot (x_n + x_1).$$

32. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landes-Olympiade)
Olympiadeklassen 11-13, 2.Tag

<u>321234</u>

Von einer ungeraden natürlichen Zahl n und von n Zahlen a_1 , a_2 ,..., a_n werde vorausgesetzt, daß jede der Zahlen 1 , 2 ,..., n genau einmal unter den a_1 , a_2 ,..., a_n vorkommt. Man beweise, daß unter dieser Voraussetzung das Produkt

$$(a_1 - 1)\cdot(a_2 - 2)\cdot\dots\cdot(a_n - k)$$

stets eine gerade Zahl sein muß.

<u>321235</u>

Man beweise, daß es zu jeder positiven ganzen Zahl n eine reelle Zahl c gibt, so daß für alle reellen Zahlen $a > 0$ die Ungleichung

$$a + a^2 + a^3 + \dots + a^{2n} \leq c\cdot\left(1 + a^{2n+1}\right)$$

gilt. Man beweise auch, daß es zu jedem n unter allen solchen Zahlen c eine kleinste gibt, und ermittle jeweils zu n dieses kleinste c.

<u>321236</u>

Es seien k_1 , k_2 und k_3 drei konzentrische Kreise mit den Radien $r_1 = 5$, $r_2 = 3\cdot\sqrt{2}$ bzw. $r_3 = 1$. Man ermittle den größtmöglichen Wert für den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC mit der Eigenschaft, daß A auf k_1 , B auf k_2 und C auf k_3 liegt.

<u>Hinweis:</u> Als bekannter Sachverhalt kann die Aussage verwendet werden, daß unter allen Dreiecken mit der genannten Eigenschaft ein Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt *existiert*.

32. Mathematik-Olympiade, 3.Stufe
Lösungen
Olympiadeklassen 11-13, 1.Tag

321231 Lösung: 6 Punkte

Angenommen, es gäbe eine positive ganze Zahl n, für die $\sqrt{n} + \sqrt{n+4}$ rational wäre. Dann wäre auch die Zahl

$$\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+4}\right)^2 = 2n + 4 + 2\sqrt{n(n+4)}$$

und folglich auch die Zahl $\sqrt{n(n+4)}$ rational. Nun gilt wegen $n \geq 1$ aber $2 \leq 2n$, also $n^2 + 2n + 2 \leq n^2 + 4n$

und somit $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + 4n < n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$;

d.h., die Zahl $n(n+4) = n^2 + 4n$ liegt zwischen den Quadraten zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen und ist daher selbst keine Quadratzahl. Also ist nach dem im Hinweis genannten Sachverhalt $\sqrt{n(n+4)}$ nicht rational. Damit wurde ein Widerspruch erhalten.

Somit war die eingangs gemachte Annahme falsch; d.h.: Es gibt keine positive ganze Zahl n, für die $\sqrt{n} + \sqrt{n+4}$ rational ist.

321232 Lösung: 8 Punkte

I. Wenn für eine reelle Zahl c die durch

$$a_1 = c \ , \qquad (1)$$

$$a_{k+1} = a_k^2 + c \quad (k = 1,2,3,\dots) \qquad (2)$$

definierte Zahlenfolge periodisch ist, so gilt für jede Periodenlänge n dieser Zahlenfolge die Gleichung $a_n = 0$.

Beweis: Wendet man die vorausgesetzte Gleichung $a_k = a_{k+n}$ mit $k = 1$ an, so folgt $c = a_1 = a_{n+1} = a_n^2 + c$ und daraus $a_n = 0$.

II. Wenn für eine reelle Zahl c in der durch (1),(2) definierten Zahlenfolge mit einer positiven ganzen Zahl n die Gleichung $a_n = 0$ gilt, so ist die Zahlenfolge periodisch und hat n als eine Periodenlänge.

Beweis durch vollständige Induktion[1]: Nach (2) und (1) folgt aus $a_n = 0$ zunächst $a_{n+1} = c = a_1$, also die behauptete Gleichung $a_k = a_{k+n}$ für $k = 1$; und wenn diese Gleichung für ein $k \geq 1$ gilt, so folgt nach (2) auch $a_{k+1} = a_k^2 + c = a_{k+n}^2 + c = a_{k+1+n}$, d.h. die Behauptung für k+1 statt k.

[1] Statt vollständiger Induktion sind hier und im folgenden auch Formulierungen wie z.B. in IV. „der Reihe nach ..." akzeptabel.

III. Es gibt für jedes $k = 2,3,\ldots$ ein Polynom $f_k(x)$, das die Zahl 1 als absolutes Glied hat, von ungeradem Grad ist und für jedes reelle c die Gleichung $c\cdot f_k(c) = a_k$ erfüllt, wo $(a_k)_{k=1,2,\ldots}$ die (mit diesem c) durch (1),(2) definierte Zahlenfolge ist.
Beweis durch vollständige Induktion: Für $k = 2$ hat das Polynom $f_2(x) = x+1$ wegen $a_2 = c(c+1)$ die genannten Eigenschaften; und wenn für ein Polynom $f_k(x)$ mit $k \geq 2$ diese Eigenschaften als Induktionsannahme vorausgesetzt werden, so liegen sie auch für das Polynom $f_{k+1}(x) = x\cdot\left(f_k(x)\right)^2 + 1$ vor; denn nach dieser Definition hat es (mit g als Grad von $f_k(x)$) den Grad $1+2g$, das absolute Glied 1 und erfüllt nach Induktionsannahme sowie wegen (2) auch

$$c\cdot f_{k+1}(c) = c\cdot\left(c\cdot\left(f_k(c)\right)^2 + 1\right) = \left(c\cdot f_k(c)\right)^2 + c$$
$$= a_k^{\,2} + c = a_{k+1}\,.$$

IV. Es sei nun p eine beliebige Primzahl. Das Polynom $f_p(x)$ ist von ungeradem Grad und hat daher eine reelle Nullstelle. Wählt man eine solche als c, so gilt nach III. die Gleichung $a_p = c\cdot f_p(c) = 0$; aus ihr folgt nach II., daß die Folge (a_k) periodisch ist und p als eine Periodenlänge hat.

Weiter sei q die kleinste Periodenlänge der Folge (a_k) und m diejenige ganze Zahl, für die $m\cdot q \leq p < (m+1)\cdot q$ gilt. Mit q ist auch $m\cdot q$ eine Periodenlänge der Folge; nach I. gilt daher $a_{mq} = 0$. Wäre $mq < p$, so folgte mit (2),(1),(2) der Reihe nach (in $p-mq$ Schritten)

$$a_{mq+1} = c = a_1\,,\quad a_{mq+2} = a_2\,,\ldots,\quad a_p = a_{p-mq}\,,$$

also $a_{p-mq} = a_p = 0$, und $p-mq$ wäre nach II. ebenfalls eine Periodenlänge der Folge; dies widerspricht wegen $p-mq < (m+1)\cdot q-mq = q$ der Minimalität von q. Somit muß $mq = p$ sein. Da p Primzahl ist, folgt entweder $q=1$ oder $q=p$. Der Fall $q=1$ scheidet aus, da er nach I. auf $a_1 = 0$, also $c=0$ führt, im Widerspruch dazu, daß nach III. die Zahl 0 wegen des absoluten Gliedes $1 = f_p(0)$ nicht Nullstelle des Polynoms $f_p(x)$ sein kann.

Damit ist p als die kleinste Periodenlänge der Folge (a_k) nachgewiesen.

321233 A Lösung: 6 Punkte

I. Wenn eine Funktion f die Forderungen der Aufgabe erfüllt, so folgt: Für alle reellen x mit

$$x \neq 0 , \quad x^2 - x - 1 \neq 0 , \quad x^2 + x - 1 \neq 0 \tag{2}$$

bleibt (2) und daher auch (1) mit -x statt x gültig, also gilt für alle diese x außer (1) auch

$$2 \cdot f\left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x - 1}\right) - 3 \cdot f\left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x - 1}\right) = -5 \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right) \tag{3}$$

und, wie sich nach Multiplikation von (1) bzw. (3) mit 2 bzw. 3, Addition und anschließender Division durch -5 ergibt,

$$f\left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x - 1}\right) = x - \frac{1}{x} . \tag{4}$$

Nun wird gezeigt:

(*) Zu jeder reellen Zahl z mit $z \neq 0$, $z \neq 1$ existieren reelle Zahlen x mit (2), für die

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x - 1} = z \tag{5}$$

gilt.

Man betrachte etwa die aus (5) durch Multiplikation mit x^2-x-1, Umordnung und Division durch z-1 entstehende Gleichung

$$x^2 - \frac{z+1}{z-1} \cdot x - 1 = 0 . \tag{6}$$

Sie hat wegen $\frac{(z+1)^2}{4 \cdot (z-1)^2} + 1 > 0$ reelle Lösungen x. Wäre für eine dieser Lösungen x = 0, so folgte aus (6) der Widerspruch 1 = 0; wäre $x^2 - x - 1 = 0$ oder $x^2 + x - 1 = 0$, so führte Subtraktion von (6) auf x=0 bzw. zx=0, im Widerspruch zu $x \neq 0$ und $z \neq 0$. Insbesondere folgt nun wegen $x^2 - x - 1 \neq 0$ aus (6) auch wieder (5), und (*) ist gezeigt.

Für die in (*) genannten z, x gilt ferner

$$z + 1 = \frac{2x^2 - 2}{x^2 - x - 1} , \quad z - 1 = \frac{2x}{x^2 - x - 1} ,$$

also

$$\frac{z + 1}{z - 1} = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x} . \tag{7}$$

Wegen (*) und (7) ergibt sich nunmehr aus der eingangs erhaltenen Feststellung, daß (4) für alle x mit (2) gilt: f kann nur diejenige Funktion sein, die für alle reellen Zahlen z mit $z \neq 0$, $z \neq 1$ durch

$$f(z) = \frac{z + 1}{z - 1} \tag{8}$$

definiert ist.

II. Diese Funktion erfüllt für alle z mit $z\neq 0$, $z\neq 1$ die Gleichung

$$2\cdot f(z) - 3\cdot f\left(\frac{1}{z}\right) = 2\cdot\frac{z+1}{z-1} - 3\cdot\frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1} = 5\cdot\frac{z+1}{z-1} . \qquad (9)$$

Für alle x mit (2) existiert ferner $z = \dfrac{x^2+x-1}{x^2-x-1}$ und erfüllt $z \neq 0$, $z \neq 1$ sowie (7). Daher besagt (9): Die durch (8) definierte Funktion f erfüllt (1) für alle x mit (2).

Mit I. und II. ist gezeigt: Die Forderungen der Aufgabe werden genau von derjenigen Funktion erfüllt, die für alle reellen x mit $x \neq 0$, $x \neq 1$ durch $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ definiert ist.

<u>Bemerkungen:</u> Ein Lösungsweg kann (bevor aus (1) Schlußfolgerungen gezogen werden) sogleich mit der Transformation (5) beginnen. Der Übergang von x zu $-x$ entspricht dann dem Übergang von z zu $\frac{1}{z}$; anstelle von (1),(3) hat man (nachdem man (7) aus (5) hergeleitet hat) das Gleichungssystem $2f(z)-3f\left(\frac{1}{z}\right)=5\cdot\frac{z+1}{z-1}$, $2f\left(\frac{1}{z}\right)-3f(z)= -\,5\cdot\frac{z+1}{z-1}$.

Der Nachweis für (*), daß in (5) <u>jedes</u> x *mit* (2) *durch ein* z *mit* $z\neq 0$, $z\neq 1$ *erhalten wird, ist zum Eindeutigkeitsnachweis* I. *der Funktion* f *erforderlich*; der umgekehrte (aus (5) weniger schwierig ersichtliche) Nachweis wird für II. benötigt - natürlich wird für solche Nachweise das formale Einführen eines neuen Buchstabens z nicht verlangt.

Mehr heuristischen Zugang, allerdings auch mehr Rechenaufwand, hat man beim Nachweis zu (*) und bei der Gewinnung von (7) aus (5), wenn man die benötigten Aussagen ($x\neq 0$ usw.) durch Schlüsse aus der expliziten Lösungsgestalt $x = \dfrac{z+1}{2(z-1)} \pm \sqrt{\left(\dfrac{z+1}{2(z-1)}\right)^2 + 1}$ bzw. nach deren Einsetzen in x^2+x-1, x^2+x-1 und $x - 1/x$ herleitet.

<u>321233 B Lösung:</u> <u>6 Punkte</u>

Führt man die Bezeichnung $x_{n+1} = x_1$ (1)

ein, so kann das Gleichungssystem auch geschrieben werden als

$$x_k\cdot x_{k+1} = 3\cdot(x_k + x_{k+1}) \quad (k = 1,\ldots,n) . \qquad (2)$$

I. Wenn ein n-Tupel $(x_1,\ldots,x_n)$ positiver ganzer x_k $(k = 1,\ldots,n)$ das Gleichungssystem erfüllt, so folgt:
Subtraktion ergibt zunächst die Gleichungen

$$x_2 \cdot (x_1 - x_3) = 3\cdot(x_1 - x_3),$$
$$x_3 \cdot (x_2 - x_4) = 3\cdot(x_2 - x_4),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_{n-1} \cdot (x_{n-2} - x_n) = 3\cdot(x_{n-2} - x_n),$$
$$x_n \cdot (x_{n-1} - x_1) = 3\cdot(x_{n-1} - x_1),$$
$$x_1 \cdot (x_n - x_2) = 3\cdot(x_n - x_2),$$

mit der zusätzlich eingeführten Bezeichnung $x_{n+2} = x_2$ auch als

$$x_k\cdot(x_{k-1} - x_{k+1}) = 3\cdot(x_{k-1} - x_{k+1}) \quad (k = 2,\ldots,n+1) \qquad (3)$$

geschrieben. Weiter folgt: Es sind alle

$$x_k \neq 3 \quad (k = 1,\ldots,n)\;; \qquad (4)$$

denn wäre ein $x_k = 3$, so folgte aus (2) nach Division durch 3 der Widerspruch $x_{k+1} = 3 + x_{k+1}$. Wegen (3) und (4) gilt

$$x_{k-1} = x_{k+1} \quad (k = 2,\ldots,n+1),$$

d.h. $x_1 = x_3 = x_5 = \cdots = a$, $x_2 = x_4 = x_6 = \cdots = b$ (5)

mit positiven ganzen Zahlen a, b, für die folglich, wenn man etwa $a = 3+p$, $b = 3+q$ setzt,

$$p \geq -2\,,\quad q \geq -2 \qquad (6)$$

und nach (2)

$$(3+p)\cdot(3+q) = 3\cdot(3+p + 3+q),$$

also

$$p\cdot q = 9 \qquad (7)$$

gilt. Die einzigen ganzzahligen Lösungen von (6),(7) sind

$$(p;q) = (1;9)\,,\quad (p;q) = (3;3)\,,\quad (p;q) = (9;1)\;;$$

damit verbleiben für a und b nur die Möglichkeiten

$$(a;b) = (4;12)\,, \qquad (8)$$
$$(a;b) = (6;6)\,, \qquad (9)$$
$$(a;b) = (12;4)\,. \qquad (10)$$

Ist n ungerade, also n+1 gerade, so folgt aus (5) und (1), daß

$$b = x_2 = \cdots = x_{n+1} = x_1 = a$$

gilt und daher (8) und (10) ausscheiden.

Unter allen n-Tupeln positiver ganzer Zahlen kann somit für ungerades n höchstens das n-Tupel

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (6,6,\ldots,6) \qquad (11)$$

das Gleichungssystem (2) erfüllen; für gerades n kommen außerdem höchstens noch die n-Tupel

$$(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n) = (4,12,\ldots,4,12)\,, \qquad (12)$$
$$(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n) = (12,4,\ldots,12,4) \qquad (13)$$

hinzu.

II. Wie aus $6\cdot6 = 3\cdot(6+6)$ bzw. $4\cdot12 = 3\cdot(4+12)$ bzw. $12\cdot4 = 3\cdot(12+4)$ ersichtlich ist, erfüllen diese n-Tupel das System (2).

Daher genügen genau die bei (11)-(13) genannten n-Tupel den Bedingungen der Aufgabe.

32. Mathematik-Olympiade, 3.Stufe
Lösungen
Olympiadeklassen 11-13, 2.Tag

321234 Lösung: 6 Punkte

Nach Voraussetzung gilt $n = 2m + 1$ mit einer natürlichen Zahl m. Da insgesamt unter den Zahlen $1, 2, \ldots, n$, also (was dasselbe ist) insgesamt unter den Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nur m Zahlen, nämlich nur $2, 4, \ldots, 2m$, gerade sind, muß sich bereits unter den $n - m = m + 1$ Zahlen $a_1, a_3, \ldots, a_n$ (mit ungeradem Index) mindestens eine ungerade Zahl befinden. Also muß bereits mindestens einer der Faktoren $(a_1 - 1), (a_3 - 3), \ldots, (a_n - n)$ eine gerade Zahl sein. Daraus folgt, daß das gesamte Produkt $(a_1 - 1)\cdot(a_2 - 2)\cdot\cdots\cdot(a_n - a)$ gerade sein muß.

321235 Lösung: 7 Punkte

I. Behauptung: Für alle reellen Zahlen $a > 0$ und alle $n = 1,2,\ldots$ gilt die Ungleichung

$$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{2n} \leq n\cdot\left(1 + a^{2n+1}\right) . \qquad (1)$$

Zum Beweis kann man zunächst die folgende <u>Hilfsaussage</u> zeigen: Für alle reellen $a > 0$ und alle $n = 0,1,2,\ldots$ gilt

$$1-(n+1)a^{2n+1}-a^{2n+2}+(n+1)a^{2n+3} \geq 0 . \qquad (2)$$

<u>Beweis der Hilfsaussage</u> durch vollständige Induktion:

1. Es gilt $1-a-a^2+a^3 = (1-a)(1-a^2) = (1-a)^2\cdot(1+a) \geq 0$, d.h. die Behauptung (2) mit $n = 0$.
2. Wenn (2) mit einem $n \geq 0$ gilt, so folgt wegen
$$1-a^2-a^{2n+3}+a^{2n+5} = (1-a^2)(1 - a^{2n+3})$$
$$= (1-a)^2\cdot(1+a)(1+a+\cdots+a^{2n+2}) \geq 0 ,$$
daß auch
$$1-(n+2)a^{2n+3}-a^{2n+4}+(n+2)a^{2n+5}$$
$$= a^2\cdot\left(1-(n+1)a^{2n+1}-a^{2n+2}+(n+1)a^{2n+3}\right)$$
$$+ 1-a^2-a^{2n+3}+a^{2n+5} \geq 0 ,$$
d.h. (2) mit n+1 statt n gilt.

<u>Nun wird (1)</u> durch vollständige Induktion <u>bewiesen:</u>

1. Die schon gezeigte Ungleichung $1-a-a^2+a^3 \geq 0$ ergibt auch (1) mit $n = 1$.
2. Wenn (1) mit einem $n \geq 1$ gilt, so folgt hieraus, d.h. aus
$$n-a-a^2-a^3-\cdots-a^{2n}+na^{2n+1} \geq 0 ,$$
durch Addition der Hilfsaussage (2), daß
$$n+1-a-a^2-a^3-\cdots-a^{2n}-a^{2n+1}-a^{2n+2}+(n+1)a^{2n+3} \geq 0$$
gilt; damit folgt Ungleichung (1) mit n+1 statt n, nämlich
$$a+a^2+a^3+\cdots+a^{2n}+a^{2n+1}+a^{2n+2} \leq (n+1)\cdot\left(1 + a^{2n+3}\right) .$$

II. Behauptung: Für jede reelle Zahl $c < n$ gibt es eine reelle Zahl $a > 0$, für die

$$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{2n} > c \cdot \left(1 + a^{2n+1}\right) \qquad (3)$$

gilt. Beweis: Aus $c < n$ folgt $2n > c \cdot 2$; damit erweist sich $a = 1$ als eine Zahl, für die (3) gilt.

Mit I. ist der geforderte Existenznachweis für eine reelle Zahl c der genannten Art erbracht; weiter ist mit I. und II. dann $c = n$ als die kleinste solche Zahl nachgewiesen.

321236 Lösung: 7 Punkte

Der gemeinsame Mittelpunkt der Kreise k_1, k_2, k_3 sei M, für jedes Dreieck ABC mit

$$A \text{ auf } k_1, \quad B \text{ auf } k_2, \quad C \text{ auf } k_3 \qquad (*)$$

seien AD, BE, CF die auf BC, CA bzw. AB senkrechten Höhen.

I. Liegt M nicht auf der Strecke CF, so gibt es auf k_3 einen Punkt C', für den ABC' größeren Flächeninhalt als ABC hat.

Beweis: Die Parallele durch M zur Geraden g durch A,B schneide die Gerade h durch C,F in Q; die Parallele m durch M zu h schneide g in P. Unter den Schnittpunkten von m mit k_3 kann man C' so wählen, daß M der Strecke C'P angehört; damit wird $\overline{C'P} = \overline{C'M} + \overline{MP} = r_3 + \overline{MP} = \overline{CM} + \overline{QF}$. Falls nun M nicht auf h liegt, ist CQM ein (eventuell mit C=Q entartetes) bei Q rechtwinkliges Dreieck, und es folgt $\overline{CM} > \overline{CQ}$, also $\overline{C'P} > \overline{CQ} + \overline{QF} \geq \overline{CF}$. Liegt aber M auf h, d.h., ist M=Q, so folgt wegen der Lage von M außerhalb CF, daß $\overline{CM} + \overline{MF} > \overline{CF}$ und damit ebenfalls $\overline{C'P} > \overline{CF}$ gilt. Also hat ABC' größere auf AB senkrechte Höhe und folglich größeren Flächeninhalt als ABC.

Entsprechend kann man schließen, wenn M nicht auf AC oder nicht auf BE liegt. Also gilt: Wenn nicht alle drei Höhen AD, BE, CF durch M gehen, d.h., wenn M nicht im Innern des Dreiecks ABC liegt und zugleich sein Höhenschnittpunkt ist, so gibt es ein Dreieck, dessen Ecken die zu (*) entsprechende Bedingung erfüllen und das größeren Flächeninhalt als ABC hat.

II. Nach dem im Hinweis genannten Sachverhalt existiert[1] unter allen Dreiecken mit (*) eines mit größtmöglichem Flächen-

[1] Diese Existenzaussage kann z.B. durch Anwendung des Satzes von Weierstraß oder auch durch Konvergenzbetrachtungen zur sukzessiven (nämlich wechselweise mit den k_i durchgeführten) Anwendung von I. bewiesen werden; ohne solche zusätzlichen Argumente folgt *allein aus der Angabe* I. *einer Vergrößerungsmöglichkeit* des Flächeninhalts *für Dreiecke* *ohne* die Eigenschaft, M im Innern als Höhenschnittpunkt zu enthalten, noch nicht *die Maximalität* *bei Vorliegen* dieser Eigenschaft. - Wegen der Vorgabe der Existenzaussage werden jedoch Ausführungen hierzu nicht vom Schüler verlangt.

inhalt. Wegen I. folgt daher: Wenn der Flächeninhalt eines Dreiecks mit (*), in dessen Innerem der Punkt M zugleich der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ist, durch diese Voraussetzungen eindeutig bestimmt ist, so ist er der gesuchte größtmögliche Flächeninhalt.

Wenn nun ein Dreieck ABC diese Voraussetzungen erfüllt (Abb. L 321236), so folgt: Die auf BC, CA bzw. AB senkrechten Höhen AD, BE bzw. CF schneiden sich in M, und es gilt $\overline{MA} = 5$, $\overline{MB} = 3\cdot\sqrt{2}$, $\overline{MC} = 1$. Mit $\overline{MF} = x$ gilt nach dem Satz des Pythagoras $\overline{AF} = \sqrt{25 - x^2}$ und $\overline{BF} = \sqrt{18 - x^2}$. Mit $\overline{\measuredangle BAC} = \alpha$ gilt ferner $\overline{\measuredangle FMB} = \overline{\measuredangle CME} = 90^\circ - \overline{\measuredangle ACF} = \alpha$; damit ergibt sich $\Delta AFC \sim \Delta MFB$, also

$$\begin{aligned}(1 + x) : \sqrt{25 - x^2} &= \sqrt{18 - x^2} : x ,\\ x^2\cdot(1 + x)^2 &= (25 - x^2)\cdot(18 - x^2) ,\\ x^4 + 2x^3 + x^2 &= 450 - 43x^2 + x^4 ,\\ x^3 + 22x^2 - 225 &= 0 ,\\ (x - 3)\cdot(x^2 + 25x + 75) &= 0 .\end{aligned}$$

Wegen $x > 0$, also $x^2 + 25x + 75 > 0$ folgt $x = 3$ und damit weiter $\overline{AB} = \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{18 - x^2} = 7$, $\overline{CF} = 1 + x = 4$.

Also ist durch die genannten Voraussetzungen eindeutig der Flächeninhalt des Dreiecks ABC bestimmt und somit der gesuchte größtmögliche Flächeninhalt; er beträgt $\frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{CF} = 14$.

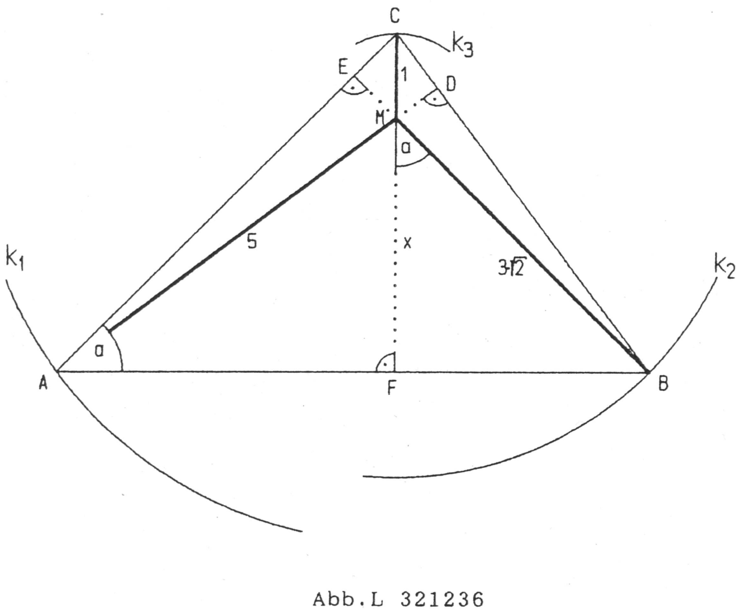

Abb.L 321236

Punktverteilungsvorschläge

321231

Zurückführung auf eine (zum weiteren Beweis verwendbare) Aussage (z.B. $n^2 + 4n$ ist nicht Quadratzahl) 3

Abschließender Beweis (durch Nachweis einer solchen Aussage) .. 3

6

321232

(Nutzbare) Charakterisierung der Periodenlängen, z.B. (I.,II.) Äquivalenz zur Bedingung $a_n = 0$ 3

Erreichbarkeit von $a_p = 0$, z.B. wegen der Existenz der Nullstelle eines (zuvor aus der Rekursionsformel gewonnenen) Polynoms (III., erster Absatz in IV.) 3

Nachweis der Minimalität von p als Periodenlänge 2

8

321233 A

Herleitung einer Relation der Gestalt f(z) = u, z.B. (4) 2

Nachweis, daß für alle z $\neq 0$, $\neq 1$ auf (8) geschlossen werden kann, z.B. unter Nachweis von (*) 2

Probe (II.) (Falls - statt gesonderter Probe - Äquivalenznachweis, Punktanteil entsprechend vergeben) 2

6

321233 B

Zurückführung auf einfachere Aussagen, z.B. (5) mit $a \cdot b = 3 \cdot (a + b)$ 2

Herleitung von (11) bzw. von (11)-(13) für ungerades n bzw. gerades n 2

Probe (II.) (Falls - statt gesonderter Probe - Äquivalenznachweis, Punktanteil entsprechend vergeben) 2

6

Punktverteilungsvorschläge

<u>321234</u>

Nutzung des Vorliegens einer Permutation sowie
der Eigenschaft von n, ungerade zu sein 4
Abschließender Nachweis der Existenz
eines geradzahligen Faktors 2
                                                             6

<u>321235</u>

I.Nachweis der Ungleichung mit c = n:
Anfangsschritt einer vollständigen Induktion
(oder Teilaussage entsprechenden Bedeutungs-Anteils) 1
Weitere (als wesentlicher Beweisschritt nutzbare)
Aussage (z.B. Hilfsaussage (2) und ihr Nachweis) 3
Abschließende Durchführung des Nachweises (z.B. durch
vollständige Induktion unter Nutzung der Hilfsaussage) 2
II.Nachweis, daß mit keinem $c < n$
die Ungleichung für alle a gilt 1
                                                             7

<u>321236</u>

Schluß aus der Maximalität des Flächeninhalts
auf die Lage von M auf je einer Höhe des Dreiecks,
sinngemäß mit Berücksichtigung von:
Widerlegung der Lage von M außerhalb der
Trägergeraden der Höhe 2
Widerlegung der Lage von M auf der Träger-
geraden der Höhe, aber außerhalb des Dreiecks 2
Ermittlung des Flächeninhaltes aus den
(als Höhenabschnitten auftretenden) Radien 5, $3\sqrt{2}$, 1 3
                                                             7