32. Mathematik-Olympiade
2. Stufe
Aufgaben
Olympiadeklasse 11/12

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*
Die Nutzung eines Taschenrechners ist zwar gestattet, doch sind die Aufgaben so gefaßt, daß der Taschenrechner keinen wesentlichen Lösungsschritt erschließt. Auch bleibt die Angabe von Begründungen erforderlich, z.B. zum Rechenweg und zur Rechengenauigkeit.

321221

Man ermittle zu jeder ganzen Zahl k alle diejenigen Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen, die das Gleichungssystem aus den beiden folgenden Gleichungen (1),(2) erfüllen:

$$x^2 + k\cdot y^2 = 4 , \qquad (1)$$

$$k\cdot x^2 - y^2 = 2 . \qquad (2)$$

321222

Man beweise, daß für jede positive ganze Zahl n die Ungleichung

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

gilt.

321223

Man beweise:
In jedem Dreieck ist für jede seiner Ecken der Abstand des Höhenschnittpunktes zu dieser Ecke doppelt so groß wie der Abstand des Umkreismittelpunktes von derjenigen Seite, die der genannten Ecke gegenüberliegt.

321224

Eine Schulklasse ist im Sportunterricht in einer Linie angetreten. Auf das Kommando „rechts um!" drehen sich alle Schüler um 90°, jedoch einige zur falschen Richtung. Jeder Schüler kehrt also jedem seiner Nachbarn entweder das Gesicht oder den Rücken zu.
Von dieser Anfangssituation an drehen sich nur noch zu jeder vollen Sekunde genau diejenigen Schüler, und zwar um 180°, die einem ihrer Nachbarn das Gesicht zuwenden und dabei sein Gesicht sehen.

Man untersuche, ob sich aus jeder (der obigen Beschreibung entsprechenden) Anfangssituation einer Schulklasse heraus einmal ein Zeitpunkt einstellen muß, von dem an sich kein Schüler mehr dreht.

32. Mathematik-Olympiade
2. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 11/12

321221 Lösung: 10 Punkte

I. Wenn zu einer ganzen Zahl k das System (1),(2) von einem Paar (x;y) ganzer Zahlen erfüllt wird, so folgt:

Einsetzen von y^2 aus (2) in (1) ergibt

$$x^2 + k\cdot(k\cdot x^2 - 2) = 4 ,$$

$$x^2\cdot(1 + k^2) = 4 + 2k . \qquad (3)$$

Im Fall $k \leq -3$ folgt aus (3) der Widerspruch $x^2\cdot(1 + k^2) < 0$.

In den Fällen $k = -2$, $k = -1$ führt (3) auf $x = 0$ bzw. $x^2 = 1$; damit führt (2), ebenso wie auch im Fall $k = 0$, auf den Widerspruch $y^2 < 0$.

In den Fällen $k = 1$, $k = 2$ führt (3) auf $x^2 = 3$ bzw. $5x^2 = 8$ im Widerspruch zur Ganzzahligkeit von x.

Im Fall $k = 3$ führt (3) auf $x^2 = 1$ und dann (2) auf $y^2 = 1$, also können (1),(2) nur von den Paaren (1;1), (1;-1), (-1;1), (-1;-1) erfüllt werden.

Im Fall $k > 3$ folgt aus (3) einerseits wegen $1 + k^2 > 0$ und $4 + 2k > 0$ die Ungleichung $x^2 > 0$; andererseits folgt wegen $k^2 - 2k - 3 = (k+1)(k-3) > 0$, also $1 + k^2 > 4 + 2k$, auch $x^2 < 1$ und damit ein Widerspruch zur Ganzzahligkeit von x.
(Andere Möglichkeit, im Fall $k > 3$ zu schließen: Wäre $y^2 = 0$, so folgte aus (1) und (2) der Widerspruch $4 = x^2 \leq kx^2 = 2$. Wäre $x^2 = 0$, so folgte der schon bemerkte Widerspruch $y^2 < 0$ aus (2). Daher müßte $x^2 \geq 1$ und $y^2 \geq 1$ sein, und nun ergäbe sich aus (1) der Widerspruch $4 = x^2 + ky^2 \geq 1 + 4\cdot 1$.)

Somit hat sich ergeben:

Für jedes ganzzahlige $k \neq 3$ gibt es kein Paar (x;y) ganzer Zahlen, mit dem das System (1),(2) erfüllt wäre. (4)

Für $k = 3$ kann das System (1),(2) unter den Paaren (x;y) ganzer Zahlen nur durch die Paare (1;1),(1;-1), (-1;1),(-1;-1) erfüllt werden. (5)

II. Die in (5) genannten Werte erfüllen (1),(2), wie mit

$$(\pm 1)^2 + 3\cdot(\pm 1)^2 = 4 , \quad 3\cdot(\pm 1)^2 - (\pm 1)^2 = 2$$

bestätigt wird.

Mit I.,II. ist gezeigt, daß in (4),(5) alle gesuchten Paare beschrieben sind.

321222 Lösung: 8 Punkte

Für jedes k = 1,2,3,...,n gilt

$$(2k-1)\cdot(2k+1) = 4k^2 - 1 < 4k^2 ;$$

wegen 2k+1 > 2k > 0 folglich $\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1}$,

und alle diese Zahlen sind positiv.

Die Zahl $z = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2n}$ erfüllt daher die Ungleichung

$$z^2 < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2n} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots \cdot (2n+1)} ,$$
$$= \frac{1}{2n+1}$$

und somit auch die zu beweisende Ungleichung.

321223 Lösung: 12 Punkte

Die Ecken eines beliebigen Dreiecks seien so mit A,B,C bezeichnet, daß C die genannte Ecke ist (siehe Abb.L 321223). Der Fußpunkt der zu AB bzw. zu BC senkrechten Höhe sei P bzw. Q; der Höhenschnittpunkt sei H. Die Mittelsenkrechten von AB und BC schneiden sich im Umkreismittelpunkt M; der Mittelpunkt von AB bzw. BC sei D bzw. E.

Ist ABC weder bei A noch bei C rechtwinklig, also AC nichtparallel zu den Senkrechten beider Seiten AB und BC, so gilt für die Strecken, die auf den Höhen CP, AQ bzw. auf den Mittelsenkrechten von AB, BC liegen, $CH \parallel DM$ und $AH \parallel EM$; ferner gilt nach der Umkehrung des Strahlensatzes $AC \parallel ED$. Daher sind ACH und EDM zwei Dreiecke, die in entsprechenden Winkeln übereinstimmen, also zueinander ähnlich sind. Nach dem Strahlensatz gilt andererseits $\overline{AC} = 2\cdot\overline{ED}$. Damit folgt die zu beweisende Aussage $\overline{HC} = 2\cdot\overline{MD}$.

Ist ABC bei A rechtwinklig, so gilt H = A und nach der Umkehrung des Thalessatzes M = E; damit ist $\overline{AC} = 2\cdot\overline{ED}$ bereits dieselbe Aussage wie $\overline{HC} = 2\cdot\overline{MD}$.

Ist ABC bei C rechtwinklig, so gilt H = C und M = D, also $\overline{HC} = 0 = 2\cdot 0 = 2\cdot\overline{MD}$.

Damit ist der Beweis für jeden möglichen Fall geführt.

Bemerkung: Anstelle der (im obigen Beweis möglichen) einheitlichen Behandlung aller Dreiecke, die weder bei A noch bei C rechtwinklig sind, kann es bei anderem Beweisaufbau notwendig sein, mehrere Fälle wie etwa in Abb.L 321223 unterschiedlich zu behandeln.
Auch sonst sind andere Falleinteilungen möglich, z.B. können auch die bei B rechtwinkligen Dreiecke einfacher behandelt werden, analog wie oben die bei A rechtwinkligen Dreiecke (siehe ebenfalls Abb.L 321223).

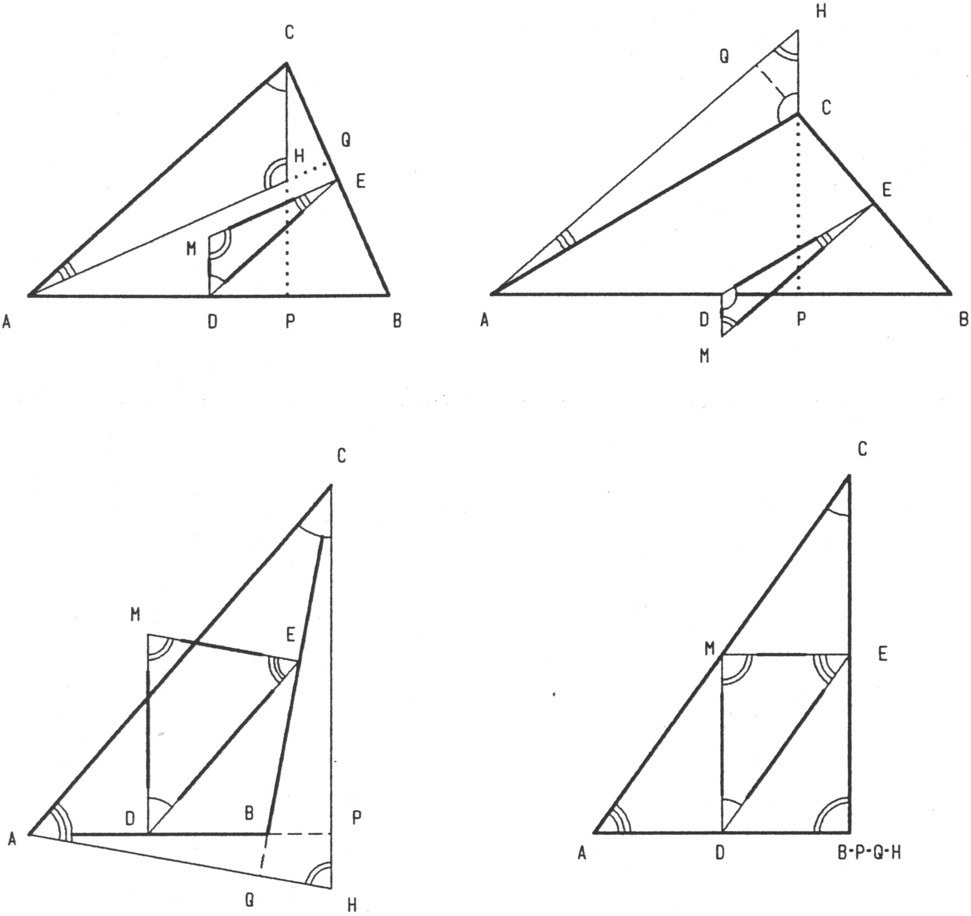

Abb.L 321223

<u>321224 Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

Man bezeichne in jeder Situation die Schüler mit dem Symbol L bzw. R, je nachdem, ob sie zu dem betreffenden Zeitpunkt nach links oder rechts blicken. Dann besagt die Regel über das Umdrehen: Zu jeder vollen Sekunde wird jedes Paar der Form R,L durch L,R ersetzt, und sonstige Änderungen finden nicht statt. Dies kann man auch so ausdrücken, indem man nur die Symbole L beachtet: Zu jeder vollen Sekunde rücken genau alle diejenigen Symbole L, die ein linkes Nachbarsymbol haben, das nicht L lautet, um eine Stelle nach links.

Für jede Anfangssituation gilt wegen der endlichen Schülerzahl der Klasse: Nach endlich vielen Schritten entsteht durch dieses Weiterrücken schließlich diejenige Folge, in der alle Symbole L so weit wie möglich nach links gerückt sind. Von demjenigen Zeitpunkt an, in dem diese Situation erreicht ist, führt kein Schüler der Klasse mehr eine Drehung aus.

Es gibt andere Lösungsfassungen, z.B.:
Die Schüler seien von links nach rechts durchnumeriert. Angenommen, es gäbe eine Anfangssituation, nach der mindestens ein Schüler sich unendlich oft drehen würde. Für eine solche Anfangssituation würde gelten:
Es gäbe unter allen sich unendlich oft drehenden Schülern auch einen Schüler A mit der niedrigsten Nummer. Er wäre nicht der ganz links stehende Schüler (denn dieser kann sich insgesamt höchstens einmal drehen). Unter den unendlich vielen Zeitpunkten, an denen der Schüler A sich drehen würde, gäbe es auch unendlich viele Zeitpunkte, an denen er vor dieser Drehung seinem linken Nachbar das Gesicht zugewandt haben müßte. Das aber würde nur dann zu dieser Drehung Anlaß gegeben haben, wenn A zugleich das Gesicht des Nachbarn gesehen hätte; damit wäre folglich auch dieser zum Drehen veranlaßt gewesen.
Somit müßte der linke Nachbar sich ebenfalls unendlich oft drehen. Mit dieser Folgerung ist der Widerspruch erreicht, daß A unter den Schülern, die sich unendlich oft drehen, nicht die niedrigste Nummer hätte. Daher war die Annahme, es gäbe eine Anfangssituation mit einem solchen Schüler, falsch.
Für jede Anfangssituation einer Schulklasse gilt also, daß jeder Schüler sich höchstens endlich oft dreht; es sei jeweils t(S) der Zeitpunkt, zu dem ein Schüler S seine letzte Drehung ausführt. Da jede Schulklasse nur endlich viele Schüler hat, gibt es unter allen Zeitangaben t(S) für diese Klasse eine mit größtem Wert T. Ist dieser Zeitpunkt T vorüber, so führt kein Schüler dieser Klasse mehr eine Drehung aus.

Vorschläge zur Punktverteilung:

321221
Elimination einer Unbekannten (z.B. von y) 2
Ausschließen von Werten (im Beispiel aller Werte $k \neq 3$) 5
Abschließende Ermittlung der Lösungspaare und Probe 3
10

321222
Bew.einer nutzbaren Aussage,z.B. $(2k-1)/(2k) < (2k)/(2k+1)$ 4
Abschließender Beweis 4
8

321223
Berücksichtigung aller Fälle, gesonderte (einfache)
Behandlung von Grenzfällen:Je nach Beweisansatz ..... bis zu 4

Restliche Punkte für jeden zu behandelnden Fall etwa im Verhältnis 1:1. Also, wenn wie oben ein wesentlicher Fall genügt:
Herleitung einer Hilfsaussage, z.B. ACH $\sim$ EDM 4
Abschließender Beweis von $\overline{HC} = 2\overline{MD}$ 4
12

321224
Ansatzwahl (z.B. L/R-Einführung; Annahme unendlich oft ...) .. 4
Durchführung der Argumentation 6
10