321041 Lösung: **6 Punkte**

Die Frage ist zu bejahen. Zum Beweis genügt die Angabe eines Kreises als Beispiel und der Nachweis, daß für keinen Punkt dieses Kreises beide Koordinaten rational sind. Ein solches Beispiel ist etwa der Kreis um den Koordinatenursprung mit dem Radius $r = \sqrt[4]{3}$. Hätte nämlich ein Punkt dieses Kreises rationale Zahlen x und y als Koordinaten, so wäre auch die Zahl $x^2 + y^2$ rational, was wegen der (als bekannter Sachverhalt (Kreisgleichung) herangezogenen oder mit dem Satz des Pythagoras begründeten) Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ auf den Widerspruch führt, daß die Zahl $r^2 = \sqrt{3}$ rational sein müßte.

321042 Lösung: **7 Punkte**

a) In der genannten Darstellung erhält die höchste (mit von Null verschiedenem Koeffizienten auftretende) Potenz x^{2n} den Koeffizienten 1, ebenso die niedrigste Potenz x^0 (= 1). Also sind *mindestens zwei* Koeffizienten ungerade.
Bildet man ferner (durch Einsetzen von x = 1) die Zahl $p_n(1)$, so ist dies einerseits die Summe aller Koeffizienten; andererseits ist $p_n(1) = 3^n$ eine ungerade Zahl. Also muß *mindestens ein weiterer* Koeffizient ungerade sein; denn gäbe es in $p_n(x)$ genau zwei ungerade Koeffizienten, so wäre die Summe aller Koeffizienten gerade.

b) Man kann zunächst folgende Hilfsaussage zeigen: In $p_n(x)$ sind genau so viele Koeffizienten ungerade wie in $p_{2n}(x) = (p_n(x))^2$.
Beweis: Aus (der bereits geordneten Darstellung von) $p_n(x)$ entsteht beim Quadrieren eine Summe, die erstens zu jedem Glied aus $p_n(x)$ das Quadrat dieses Gliedes und zweitens zu je zwei Gliedern aus $p_n(x)$ deren doppeltes Produkt enthält. Wenn man dann ordnet und zusammenfaßt, so ergibt sich: Zu jeder Potenz x^i, die in $p_n(x)$ einen ungeradem Koeffizienten c hatte, hat in $p_{2n}(x)$ die Potenz x^{2i} ebenfalls einen ungeraden Koeffizienten. Dieser entsteht nämlich, indem man die ungerade Zahl c^2 bildet und (außer für i=n und i=0) die doppelten Produkte weiterer Koeffizienten aus $p_n(x)$ addiert. Jede andere Potenz x^j in $p_{2n}(x)$ aber hat einen geraden Koeffizienten; denn er entsteht ebenfalls als Summe derartiger doppelter Produkte, zu denen, wenn $j = 2i$ ist und x^i in $p_n(x)$ einen geraden Koeffizienten c hatte, die gerade Zahl c^2 zu addieren ist.
Da $p_1(x)$ genau drei ungerade Koeffizienten hat, folgt aus der Hilfsaussage: Für die unendlich vielen Werte n = 1, 2, 4, 8,... hat $p_n(x)$ genau drei ungerade Koeffizienten.

321043A Lösung: 7 Punkte

Abb.L 321043A zeigt eine Zeichnung der verlangten Art.

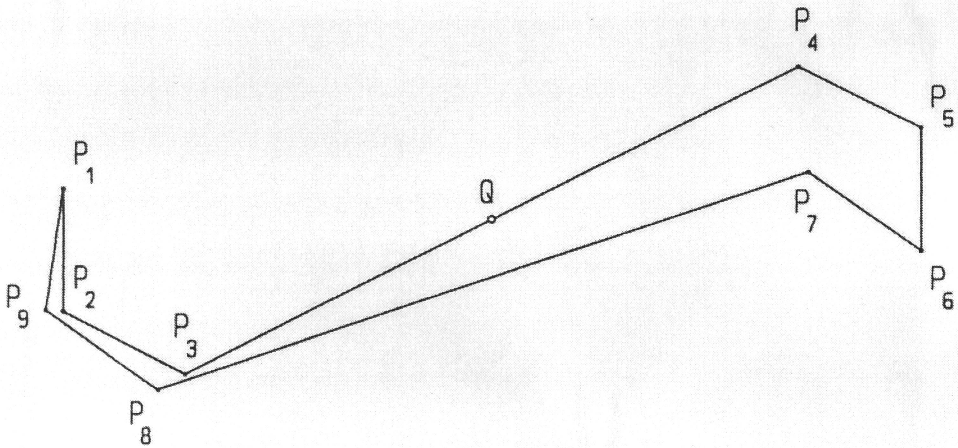

Abb. L 321043A

Hinweis: Zur Einschätzung vorgelegter Zeichnungen sind diese auf Erfüllung der Bedingungen (1),(2) zu prüfen. Dabei genügt zu (1) oft der unmittelbare Augenschein; jedoch kann auch wegen eines „knappen Vorbeigehens" (wie P_8P_7 an P_3 in Abb.L 321043A) größere Genauigkeit erforderlich werden. Zu (2.1), (2.2) sind Bedingungen der Gleichorientiertheit und Übereinstimmungen wie (in Abb. L 321043A) $\overline{P_1P_2} = \overline{P_1P_9}$, $\overline{\sphericalangle P_1P_2P_3} = \overline{\sphericalangle P_1P_9P_8}$, $\overline{P_2P_3} = \overline{P_9P_8}$, ..., $\overline{P_4P_5} = \overline{P_7P_6}$ bzw. $\overline{P_1P_2} = \overline{P_6P_5}$, $\overline{\sphericalangle P_1P_2P_3} = \overline{\sphericalangle P_6P_5P_4}$, $\overline{P_2P_3} = \overline{P_5P_4}$, $\overline{\sphericalangle P_2P_3Q} = \overline{\sphericalangle P_5P_4Q}$, $\overline{P_3Q} = \overline{P_4Q}$ und $\overline{\sphericalangle P_3QP_4} = 180^\circ$ zu prüfen.

Erfolgt eine Konstruktionsbeschreibung, in der auch (beliebig oder bedingt) *wählbare* Elemente auftreten, so ist zu prüfen, ob die Bedingungen (1),(2) bei *jeder* (nach Beschreibung zulässigen) Wahl erfüllt werden.

321043B Lösung: 7 Punkte

I. Wenn für ganze Zahlen a, b die Bedingung der Aufgabenstellung durch ein Polynom h(x) erfüllt wird, so hat[1] dieses Polynom mit zwei Zahlen p, q die Gestalt $h(x) = x^2 + px + q$, und es gilt
$$(x^2 + ax + b)\cdot(x^2 + px + q) = x^4 + 2ax^3 + 2x^2 + x - 2,$$
$$x^4 + (a+p)x^3 + (ap+b+q)x^2 + (aq+bp)x + bq = x^4 + 2ax^3 + 2x^2 + x - 2$$
für jede Zahl x mit $g(x) \neq 0$. Nach dem (als bekannter Sachverhalt verwendeten oder z.B. durch Einsetzen genügend vieler x-Werte zu beweisenden) Satz über den Koeffizientenvergleich folgen die Gleichungen

---

1) Diese Teilaussage kann, ebenso wie im weiteren Beweisverlauf für die Gleichungen (1)-(4) bemerkt, auf den Satz vom Koeffizientenvergleich zurückgeführt werden. In Schülerlösungen kann eine Darstellung akzeptiert werden, die - wie oben - auf Ausführungen hierzu verzichtet.

$$a + p = 2a\ , \qquad (1)$$
$$ap + b + q = 2\ , \qquad (2)$$
$$aq + bp = 1\ , \qquad (3)$$
$$bq = -2\ . \qquad (4)$$

Aus (1) folgt $p = a$, aus (2) bzw. (3) dann

$$b + q = 2 - a^2. \qquad (5)$$

bzw.
$$a\cdot(q + b) = 1,$$

was wegen (5) in
$$a\cdot(2 - a^2) = 1 \qquad (6)$$

übergeht. Da a und folglich auch $2 - a^2$ ganze Zahlen sind, muß a einer der Teiler $1, -1$ von 1 sein. Wäre $a = -1$, so ergäbe (6) den Widerspruch $(-1)\cdot(2 - 1) = 1$; also verbleibt nur

$$a = 1\ . \qquad (7)$$

Damit bilden (5) und (4) das Gleichungssystem

$$b + q = 1\ ,\ bq = -2\ ,$$

das $\left(\text{z.B. über } b(1 - b) = -2,\ b^2 - b - 2 = 0,\ b = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}\right)$ auf die beiden Möglichkeiten führt, daß

$$b = 2 \quad \text{oder} \quad b = -1 \qquad (8)$$

ist. Also können ganze Zahlen a,b, mit denen die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden, nur die in (7),(8) genannten sein.

II. In der Tat bestätigt man vermittels

$$(x^2 + x + 2)\cdot(x^2 + x - 1) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 2\ ,$$

daß beide Möglichkeiten $(a;b) = (1;2),\ (1;-1)$ zu der geforderten Teilbarkeit führen.

Also sind genau diese a,b die gesuchten.

Ein <u>anderer Lösungsweg</u> ergibt sich, indem man mit dem (als bekannten Sachverhalt herangezogenen) Divisionsalgorithmus

$$\boxed{\begin{array}{l}
(x^4 + 2ax^3 + 2x^2 + x - 2) : (x^2 + ax + b) \\
\underline{-(x^4 + ax^3 + bx^2)} \qquad \text{Quotient: } x^2 + ax + 2-a^2-b \\
\quad ax^3 + (2-b)x^2 + x \\
\quad \underline{-(ax^3 + a^2x^2 + abx)} \\
\qquad (2-a^2-b)x^2 + (1-ab)x - 2 \\
\qquad \underline{-((2-a^2-b)x^2 + (2a-a^3-ab)x + 2b-a^2b-b^2)} \\
\qquad\qquad \text{Rest: } (1-2a+a^3)x - (2+2b-a^2b-b^2)
\end{array}}$$

die geforderte Teilbarkeit als äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$a^3 - 2a + 1 = 0\ , \qquad (9)$$
$$b^2 + (a^2-2)b - 2 = 0 \qquad (10)$$

nachweist. Da $(a^3 - 2a + 1):(a - 1) = a^2 + a - 1$ gilt und die Gleichung $a^2 + a - 1 = 0$ nur die nicht ganzzahligen Lösungen $a = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ hat, verbleibt für (9) nur $a = 1$ und für (10) damit nur (8).

321041

Beschreibung eines Kreises 2

Nachweis, daß für keinen seiner Punkte beide Koordinaten rational sind:

Nutzung von Kreiseigenschaften (z.B. Kreisgleichung oder Satz des Pythagoras) 2

Abschließender Nachweis (z.B. Zurückführung auf bekannte Irrationalität) 2

6

321042

a) Existenz von drei ungeraden Koeffizienten (z.B.: Höchster und niedrigster Koeff. 1
Schluß vermittels Koeff.-summe ..... 2) 3

b) Angabe unendlich vieler n (explizit in ersichtlicher Beschreibung oder z.B. rekursiv gefaßt) 1
Nachweis, daß für diese n genau drei ungerade Koeffizienten auftreten 3 4
(Diese Lösungsbestandteile brauchen nicht getrennt und nicht in dieser Reihenfolge aufzutreten.)

7

321043A

Grundsätzliche Richtigkeit der Zeichnung (d.h.: Nach eventueller Änderung gezeichneter Eckpunkte ohne Verlust von Orientierungs- oder Schnitt(freiheits)eigenschaften entsteht ein Vieleck, das alle Forderungen erfüllt) 4
(Vergabe von maximal 2 Teilpunkten kommt in Betracht, falls aus der Darstellung Teile eines zum Ziel führenden Lösungsweges hervorgehen, aber noch stärkere Änderungen, z.B. Vergrößerung der Eckenzahl, nötig wären.)

Zeichnerische Qualität, insbesondere Zeichengenauigkeit 3

7

[Wird - anstelle einer (genauen) Zeichnung oder zusätzlich zu einer solchen - eine Konstruktionsbeschreibung gegeben, so ist sie in entsprechenmder Aufteilung zur Punktvergabe mit heranzuziehen, z.B. Teilpunkte jeweils für:
- Prinzipiell erkennbare Konstruktionsinformation
- Ausreichend vollständig gegebene Konstruktionsschritte]

321043B

Herleitung von Bedingungen für die Koeffizienten eines gesuchten Polynoms (z.B. (1)-(4) oder (9),(10)) 3

Ermittlung der beiden Lösungen 3

Probe (als gesonderter Teil II oder im vorangehenden Text mit erbracht) 1

7

321044 Lösung: 6 Punkte

Angenommen, zwei Zahlen 2^i, 2^j $(11 \le i < j \le 109)$ würden in der Zifferngruppe der letzten drei Ziffern miteinander übereinstimmen. Dann folgt der Reihe nach: $2^j - 2^i$ wäre ein ganzzahliges Vielfaches von 1000, $2^{j-1} - 2^{i-1}$ eines von 500, $2^{j-2} - 2^{i-2}$ eines von 250, $2^{j-3} - 2^{i-3}$ eines von 125. Wegen $j > i \ge 11$ wären 2^{j-3} und 2^{i-3} gerade Zahlen, daher wäre $2^{j-3} - 2^{i-3}$ sogar ein geradzahliges Vielfaches von 125, d.h. ein ganzzahliges Vielfaches von 250. Also wäre $2^{j-2} - 2^{i-2}$ ein ganzzahliges Vielfaches von 500, $2^{j-1} - 2^{i-1}$ eines von 1000, d.h., auch 2^{i-1} und 2^{j-1} würden in der Zifferngruppe der letzten drei Ziffern miteinander übereinstimmen. Diese Beweisführung kann man so oft wiederholen, bis sich ergibt: 2^{10} würde mit 2^{10+j-i} in der Zifferngruppe der letzten drei Ziffern übereinstimmen. Wegen $10+j-i \le 10+109-11 < 109$ wäre das ein Widerspruch gegen die Feststellung (*). Also war die eingangs gemachte Annahme falsch; damit ist die Antwort „Nein" auf die Frage (**) bewiesen.

Hinweis: Von der Übereinstimmung zweier gerader Zahlen p, q in der Zifferngruppe der letzten drei Ziffern kann man nicht in jedem Fall auf diese Übereinstimmung für p/2 , q/2 schließen. Daher war in der obigen Beweisführung eine genauere Durchführung unter Nutzung spezieller Voraussetzungen (wie oben p, q als Zweierpotenzen mit Exponenten größer als 10) erforderlich.

321045 Lösung: 7 Punkte

a) Nach einem bekannten Verfahren (Zurückführung auf die Anzahl der Permutationen von 10 Richtungsangaben, unter denen sich 6 Angaben der einen Richtung und 4 der anderen befinden) gibt es genau $\frac{10!}{6!\cdot 4!} = 210$ möglichst kurze Wege von S nach H. Entsprechend gibt es genau $\frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$ bzw. genau $\frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$ möglichst kurze Wege von S nach E bzw. von E nach H. Folglich führen genau $4\cdot 20 = 80$ der 210 vorgenannten Wege über E; d.h. mehr als ein Drittel dieser Wege. Roberts Aussage trifft also zu.

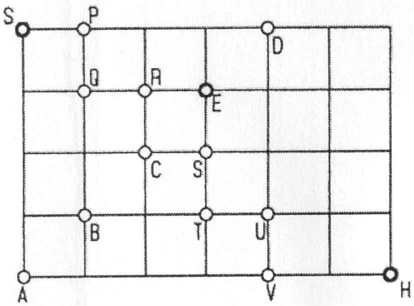

Abb.L 321045

b) Auf jedem möglichst kurzen Weg von S nach H sind zu Beginn jedenfalls 4 Entscheidungen (zwischen je 2 zu wählenden Richtungen) zu treffen. Da jede dieser Entscheidungen unabhängig von vorher getroffenen Entscheidungen so erfolgt, daß die beiden Richtungen im Durchschnitt gleich oft vorkommen, gilt: Es gibt für den Anfang des Weges bis nach den ersten 4 Entscheidungen genau $2^4 = 16$ Möglichkeiten, die alle im Durchschnitt gleich oft vorkommen.

Auf keinem dieser möglichen Anfangsstücke des Weges wird zwischendurch E erreicht; an ihrem Ende befindet sich einer der Punkte A,B,C,E,D (s.Abb. L 321045). Von keinem der

Punkte A,B,C,D gelangt man beim Fortsetzen eines möglichst kurzen Weges nach H noch zum Punkt E. Unter den 16 Wahlmöglichkeiten für die genannten Anfangsstücke sind genau 4 diejenigen, die zu E führen (nämlich die, bei denen in *genau einer* der 4 Entscheidungen die Richtung parallel zur kürzeren Rechtecksseite gewählt wird). Wenn der Weg - im vereinbarten Sinn - durch Zufallsentscheidungen gewählt worden wäre, so hätte er folglich im Durchschnitt nur an einem Viertel aller Schultage über E führen können. Die Aussage der Mutter trifft also ebenfalls zu.

Bemerkung: Daß zwischen den beiden Aussagen *nur scheinbar* ein Widerspruch besteht, kann auch so erklärt werden: Die 210 Wege von S nach H kommen mit unterschiedlich vielen Entscheidungen zustande, z.B. der Weg über A mit 4 Entscheidungen, der Weg über P,Q,R,E, S,T,U,V mit 8 Entscheidungen. Ein Lösungsansatz zu b), der auf dieses Motiv zurückgreift, müßte die Wege nicht wie in a) gleichwertig, sondern unter Berücksichtigung solcher Entscheidungs-Anzahlen zugrundelegen.

321046 Lösung: 7 Punkte

In einem Dreieck ABC sei M_c die Mitte von AB; die Fußpunkte der Lote, die von A , M_c , B auf die in C an den Umkreis gelegte Tangente gefällt werden, seien A_c , L_c , B_c ; der Fußpunkt des von C auf AB gefällten Lotes sei H_c (siehe Abb.L 321046). Wie üblich sei $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$ und $\overline{CH_c} = h_c$ gesetzt.

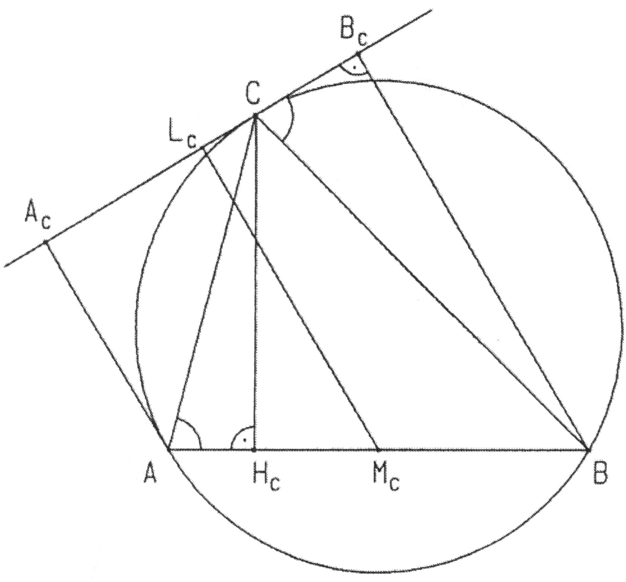

Abb.L 321046

Ist $\overline{\sphericalangle\, BAC} \neq 90^\circ$, also[1] $B_c \neq C$ und $H_c \neq A$, so gilt $\overline{\sphericalangle\, BB_cC} = \overline{\sphericalangle\, CH_cA} = 90^\circ$ und nach dem Satz über Sehnen-Tangentenwinkel und Peripheriewinkel (wobei im Fall $\overline{\sphericalangle\, BAC} > 90^\circ$ zu den Nebenwinkeln dieser Winkel überzugehen ist) $\overline{\sphericalangle\, BCB_c} = \overline{\sphericalangle\, CAH_c}$, also $\Delta\, BB_cC \sim \Delta\, CH_cA$ und daher

$$\overline{BB_c} : \overline{BC} = \overline{CH_c} : \overline{CA}\ ; \tag{1}$$

ist $\overline{\sphericalangle\, BAC} = 90^\circ$, so folgt (1) unmittelbar aus[1] $B_c = C$ und $H_c = A$.

Nach (1) und der Flächeninhaltsformel $F = \frac{1}{2}\, c \cdot h_c$, also $h_c = \frac{2F}{c}$,

hat man
$$\overline{BB_c} = \frac{h_c \cdot a}{b} = \frac{2F \cdot a}{bc}\ . \tag{2}$$

Entsprechend folgt
$$\overline{AA_c} = \frac{h_c \cdot b}{a} = \frac{2F \cdot b}{ac}\ . \tag{3}$$

Da M_cL_c die Mittellinie im Trapez ABB_cA_c ist, folgt aus (2),(3):

$$\overline{M_cL_c} = \frac{1}{2}\left(\overline{BB_c} + \overline{AA_c}\right) = \frac{F \cdot a}{bc} + \frac{F \cdot b}{ac} = F \cdot \frac{a^2 + b^2}{abc}\ . \tag{4}$$

Für die Längen der Lote, die von den Mittelpunkten der Seiten BC, CA auf die in A bzw. B an den Umkreis gelegten Tangenten gefällt werden, erhält man entsprechend die Werte

$$F \cdot \frac{b^2 + c^2}{abc} \quad \text{und} \quad F \cdot \frac{c^2 + a^2}{abc}\ ; \tag{5}$$

damit ergibt sich als Summe der Werte aus (4),(5), wie behauptet,

$$2F \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}\ .$$

---

[1] Nach dem Satz des Thales, dem Satz über Tangente und Berührungsradius sowie den Umkehrungen dieser Sätze ist das Vorliegen von $\overline{\sphericalangle\, BAC} = 90^\circ$ damit äquivalent, daß die Strecke BC durch den Mittelpunkt des Umkreises geht, d.h. mit dem Lot BB_c von B auf die in C an den Umkreis gelegte Tangente zusammenfällt.

311044

Beweis einer wesentlichen Teilaussage ,z.B. Schluß auf die Vorgänger (bezüglich der Übereinstimmung zweier zu betrachtender Zahlen in den letzten drei Ziffern) 3

Abschließende Beweisführung (Zurückführung auf (*)) 3

6

311045

a) Ermittlung der Wege-Anzahlen .... 2 } 3
   Vergleich des Quotienten mit 1/3 1

b) Ermittlung einer geeigneten Gesamtzahl von Fällen (z.B. Anzahl der Fälle der ersten 4 Entscheidungen) .... 2 } 4
   Ermittlung der hiervon zu E führenden Fälle, Vergleich des Quotienten mit 1/3 2

7

311046

Vorbereitende Aussage (z.B. (1)) 3

Ermittlung einer Lot-Länge ((4)) 3

Ermittlung der Summe 1

7