32. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landes-Olympiade)
Olympiadeklasse 10, 1.Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

321031

Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen x, y, für die

$$19 < x^2 + y^2 < 93$$

gilt!

321032

Gegeben sei ein Quadrat und eine positive ganze Zahl n. Jemand möchte ein Rechteck konstruieren, das denselben Flächeninhalt, aber einen n mal so großen Umfang wie das Quadrat hat.

a) Beweisen Sie, daß es bis auf Kongruenz genau ein solches Rechteck gibt!

b) Beweisen Sie, daß ein solches Rechteck mit Lineal und Zirkel aus der Seitenlänge des gegebenen Quadrats konstruierbar ist!

321033

Zeigen Sie, daß es möglich ist, einer Kugel acht einander kongruente gerade Kreiskegel möglichst großer Höhe so einzubeschreiben, daß jeder dieser Kegel genau drei andere von ihnen jeweils längs einer gemeinsamen Mantellinie berührt! Ermitteln Sie aus dem gegebenen Kugelradius R den Grundkreisradius r und die Höhe h solcher Kegel!

32. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landes-Olympiade)
Olympiadeklasse 10, 2.Tag

321034

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x;y;z) natürlicher Zahlen x, y, z, für die

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}$$

gilt!

321035

Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl k > 1 die folgende Aussage gilt:

Wenn die im Positionssystem der Basis k mit genau n Ziffern 1 geschriebene Zahl

$$11\ldots1$$

eine Primzahl ist, dann ist n eine Primzahl.

321036

Ermitteln Sie zu jedem spitzwinkligen Dreieck ABC alle diejenigen Punkte P, für die jedes der drei Spiegelbilder von P, gebildet durch Spiegelung an den Dreiecksseiten, auf dem Umkreis des Dreiecks liegt!

32. Mathematik-Olympiade, 3.Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 10, 1.Tag

321031 Lösung: 6 Punkte

Ist für ganze Zahlen x, y eine der Zahlen $|x|$, $|y|$ größer als 9, so ist $x^2 + y^2 \geq 10^2 > 93$, also die geforderte Ungleichung nicht erfüllt. Ferner gibt es bis auf die Reihenfolge genau die folgenden Möglichkeiten, eine Summe größer als 19 und kleiner als 93 zu bilden, die aus zwei Summanden besteht, von denen jeder eine der Quadratzahlen 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 ist:

81 + 0	64 + 0	49 + 0	36 + 0	25 + 0	
81 + 1	64 + 1	49 + 1	36 + 1	25 + 1	
81 + 4	64 + 4	49 + 4	36 + 4	25 + 4	16 + 4
81 + 9	64 + 9	49 + 9	36 + 9	25 + 9	16 + 9
	64 + 16	49 + 16	36 + 16	25 + 16	16 + 16
	64 + 25	49 + 25	36 + 25	25 + 25	
		49 + 36	36 + 36		

In genau 3 dieser Summen sind die beiden Summanden einander gleich, also gibt es genau je 1 Möglichkeit für ihre Reihenfolge. In den anderen 30 Summen sind die beiden Summanden voneinander verschieden, also gibt es genau je 2 Möglichkeiten für ihre Reihenfolge. Ferner gibt es zu jeder von Null verschiedenen Quadratzahl x^2 oder y^2 genau 2 Möglichkeiten für x bzw. y; dagegen für die Quadratzahl Null genau 1 Möglichkeit, dies tritt bei genau 5 der ebengenannten 30 Summen ein. Also beträgt die gesuchte Anzahl

$$3\cdot 1 \cdot 2\cdot 2 \quad + \quad 25\cdot 2 \cdot 2\cdot 2 \quad + \quad 5\cdot 2 \cdot 2\cdot 1 \quad = \quad 232 \ .$$

321032 Lösung: 7 Punkte

Das gegebene Quadrat habe die Seitenlänge a.

a) Ein Rechteck mit den Seitenlängen b und c erfüllt genau dann die geforderten Bedingungen, wenn die Gleichungen

$$bc = a^2 , \qquad (1)$$

$$2(b+c) = n\cdot 4a \qquad (2)$$

gelten.

I. Wenn b und c diese Gleichungen erfüllen, so folgt:
Nach (2) ist

$$c = 2na - b , \qquad (3)$$

aus (1) folgt hiermit

$$b\cdot(2na - b) = a^2 ,$$

$$b^2 - 2nab + a^2 = 0 .$$

Wegen $n \geq 1$, also $(na)^2 - a^2 \geq 0$, folgt, daß b eine der Längen

$$b = na \pm \sqrt{(na)^2 - a^2} \qquad (4)$$

ist; nach (3) gehören hierzu (jeweils mit dem oberen bzw. unteren Vorzeichen) die Längen

$$c = na \mp \sqrt{(na)^2 - a^2} \;. \qquad (5)$$

II. Für diese Längen sind mit

$$bc = \left(na \pm \sqrt{(na)^2 - a^2}\right)\cdot\left(na \mp \sqrt{(na)^2 - a^2}\right)$$
$$= (na)^2 - \left((na)^2 - a^2\right) = a^2 \,,$$
$$2(b+c) = 2\left(na \pm \sqrt{(na)^2 - a^2} + na \mp \sqrt{(na)^2 - a^2}\right)$$
$$= 4na$$

die Gleichungen (1) und (2) erfüllt.

Durch I. und II. ist gezeigt, daß genau die in (4),(5) beschriebenen Paare (b;c) die Gleichungen (1),(2) erfüllen. Da sie sich nur in der Reihenfolge der Längen b, c unterscheiden, gibt es bis auf Kongruenz genau ein Rechteck, das die geforderten Bedingungen erfüllt; es hat die Seitenlängen

$$na + \sqrt{(na)^2 - a^2} \quad \text{und} \quad na - \sqrt{(na)^2 - a^2} \;. \qquad (6)$$

b) Aus der gegebenen Länge a kann man mit Lineal und Zirkel die Länge n·a durch wiederholtes Abtragen konstruieren. Dann kann man z.B. unter Anwendung des Thalessatzes ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, in dem a bzw. n·a die Längen einer Kathete bzw. der Hypotenuse sind. Trägt man die Länge der anderen Kathete auf einer Strecke der Länge n·a bzw. auf deren Verlängerung ab, so erhält man die zweite bzw. erste in (6) genannte Länge und kann mit ihnen ein gesuchtes Rechteck konstruieren. (Abb. L 321032 zeigt eine mögliche Konstruktion im Beispiel n = 3; das zeichnerische Ausführen oder schrittweise Beschreiben wird genäß dem Aufgabentext nicht vom Schüler verlangt.)

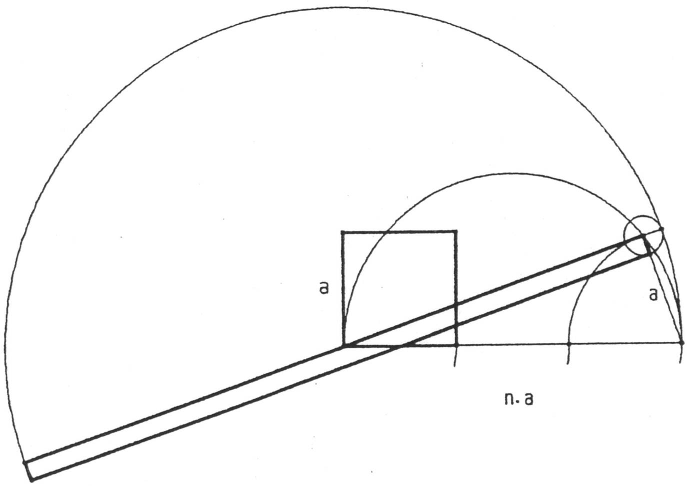

Abb.L 321032

321033 Lösung:

7 Punkte

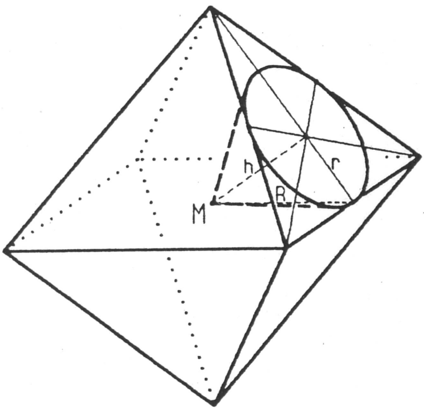

Abb.L 321033

Bildet man in jeder der acht Seitenflächen eines regulären Oktaeders (diese Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke) den Inkreis, so hat jeder dieser acht Kreise mit genau drei anderen je genau einen gemeinsamen Punkt, nämlich jeweils den Berührungspunkt auf einer gemeinsamen Kante zweier Seitenflächen (diese Berührungspunkte sind die Mittelpunkte der Kanten).
Verbindet man den Mittelpunkt M des Oktaeders mit den Kreisen, so erhält man acht Kreiskegel, die die gewünschten Berührungen aufweisen. Sie sind gerade Kegel, da das Lot von M auf je eine Seitenfläche deren (Inkreis-)Mittelpunkt als Fußpunkt hat (siehe Abb.L 321033).
Da diese acht Lote einander gleichlang sind, sind die acht Kegel (ebenso wie ihre Grundkreise) einander kongruent. Alle ihre Mantellinien sind also von gleicher Länge; daher sind die Kegel einer Kugel so einbeschrieben, daß (zum Einbeschreiben in diese Kugel) ihre Höhe möglichst groß ist. Die Länge dieser Mantellinien, also der Kugelradius R, ist in dem von vier Oktaederkanten gebildeten Quadrat der Abstand des Quadratmittelpunktes von einem Kantenmittelpunkt, also beträgt die Kantenlänge 2R . Der Grundkreisradius r der Kegel ist (nach dem Satz über den Schwerpunkt auf den Seitenhalbierenden) ein Drittel der Höhenlänge eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge 2R, also

$$r = \frac{1}{3} R\cdot\sqrt{3} \, .$$

Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich als Höhenlänge der Kegel

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = R\cdot\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} R\cdot\sqrt{6} \, .$$

Punktverteilungsvorschläge

321031

Nachweis, daß nur $|x|, |y| \leq 9$ in Frage kommen 2
Ermittlung der Anzahl von Lösungspaaren (x;y), z.B.:
  Aufzählung der Paare $(|x|;|y|)$ mit $|x| \geq |y|$ 2
  Anzahldiskussionen abhängig von: $|x| = |y|$ oder $|x| \neq |y|$
    sowie von: $|x|, |y| = 0$ oder $\neq 0$ 2
                                                                        6

321032

Lösung (4),(5) des Gleichungssystems (1),(2) einschl. Probe
  (oder sonstiger Äquivalenznachweis (1),(2) $\Leftrightarrow$ (4),(5))
  und Schluß auf Eindeutigkeit bis auf Kongruenz 4
Schluß auf Konstruierbarkeit
  (der Längen (6), also) des Rechtecks 3
                                                                        7

321033

Lagebeschreibung von acht Kegeln mit Nachweis der geforderten
  Berührungen und der geforderten umbeschriebenen Kugel 3
Ermittlung der Längen r, h aus R 4
                                                                        7

32. Mathematik-Olympiade, 3.Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 10, 2.Tag

321034 Lösung: 7 Punkte

I. Wenn ein Tripel $(x;y;z)$ natürlicher Zahlen die Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} \qquad (1)$$

erfüllt, so folgt: Wird zunächst außer (1) auch

$$x \leq y \leq z \qquad (2)$$

vorausgesetzt, so ist

$$\frac{3}{x} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}, \quad \text{also} \quad x \leq \frac{3 \cdot 5}{4} < 4$$

und

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}, \quad \text{also} \quad x > \frac{5}{4} > 1,$$

also entweder $x = 3$ oder $x = 2$.

1.) Wäre $x = 3$, so folgte $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$

und daraus $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{15}$, also $y \leq \frac{2 \cdot 15}{7} < 5$

und $\frac{1}{y} < \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{15}$, also $y > \frac{15}{7} > 2$,

also entweder $y = 4$ oder $y = 3$.

Aus $y = 4$ folgte $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{4} = \frac{13}{60}$,

aus $y = 3$ folgte $\frac{1}{z} = \frac{7}{15} - \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$;

beides im Widerspruch zur Ganzzahligkeit von z.

2.) Also verbleibt nur die Möglichkeit $x = 2$. Hiermit folgt

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10} \qquad (3)$$

und daraus $\frac{2}{y} \geq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10}$, also $y \leq \frac{2 \cdot 10}{3} < 7$

und $\frac{1}{y} < \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10}$, also $y > \frac{10}{3} > 3$.

Wäre $y = 6$, so folgte $\frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$,

ebenfalls im Widerspruch zur Ganzzahligkeit von z.

Also verbleiben nur die Möglichkeiten, daß entweder

$$y = 5, \quad \frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}, \quad z = 10 \qquad (4)$$

oder

$$y = 4, \quad \frac{1}{z} = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}, \quad z = 20 \qquad (5)$$

gilt.

Somit können (1) und (2) unter allen Tripeln natürlicher Zahlen nur von (2;5;10) und (2;4;20) erfüllt werden, die allein gestellte Forderung (1) nur von

$$\left.\begin{array}{l}(2;5;10),(2;10;5),(5;2;10),(5;10;2),(10;2;5),(10;5;2),\\(2;4;20),(2;20;4),(4;2;20),(4;20;2),(20;2;4),(20;4;2).\end{array}\right\}(6)$$

II. Wie aus $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{5+2+1}{10}=\frac{4}{5}$ und $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}=\frac{10+5+1}{20}=\frac{4}{5}$

folgt (oder auch durch Verweis auf die in (4),(5) und (3) vorliegenden Berechnungen belegt werden kann), erfüllen diese Tripel die Gleichung (1).

Mit I. und II. ist gezeigt, daß genau die Tripel (6) den Bedingungen der Aufgabe genügen.

<u>321035 Lösung:</u> 6 Punkte

Zu zeigen ist: Wenn es zu einer natürlichen Zahl n eine Zerlegung $n = a\cdot b$ in natürliche Zahlen a,b mit $1 < a < n$ und $1 < b < n$ gibt, dann ist 11...1 ebenfalls keine Primzahl.

Um dies zu zeigen, kann man sich darauf berufen, daß der aus dem dekadischen Positionssystem bekannte Divisionsalgorithmus auch in jedem anderen Positionssystem korrekt ist. Er zeigt, daß die mit n Ziffern 1 geschriebene Zahl teilbar ist durch die mit a Ziffern 1 geschriebene Zahl: Auf einen Divisionsschritt, der zur Bildung einer Ziffer 1 im Quotienten führt und den Dividend um a Ziffern 1 verkürzt, folgen daher zunächst a-1 Schritte mit dem Resultat einer Ziffer 0; dann beginnt diese Abfolge von vorn, bis nach ihrem insgesamt b-maligem Ablauf mit dem Auftreten des Restes 0 die behauptete Teilbarkeit bewiesen ist.

<u>2.Lösungsweg:</u> Unter Verwendung der Summenformel für geometrische Reihen kann man die Teilbarkeit

von $$k^{ab-1}+k^{ab-2}+\cdots+k+1=\frac{k^{ab}-1}{k-1}$$

durch $$k^{a-1}+k^{a-2}+\cdots+k+1=\frac{k^{a}-1}{k-1}$$

so begründen: Der Quotient ist

$$\frac{k^{ab}-1}{k-1}:\frac{k^{a}-1}{k-1}=\frac{(k^a)^b-1}{k^a-1}=(k^a)^{b-1}+(k^a)^{b-2}+\cdots+k^a+1,$$

also eine natürliche Zahl.

<u>321036 Lösung:</u> 7 Punkte

Für jedes Dreieck ABC bezeichne α, β bzw γ die Größe des Innenwinkels bei A, B bzw. C; der Umkreis k habe den Mittelpunkt M und den Radius r. Die Bilder von k bei Spiegelung an BC, CA bzw. AB seien k_a, k_b bzw. k_c; die Mittelpunkte M_a, M_b, M_c dieser Kreise sind die Bilder von M bei diesen Spiegelungen (siehe Abb.L 321036).

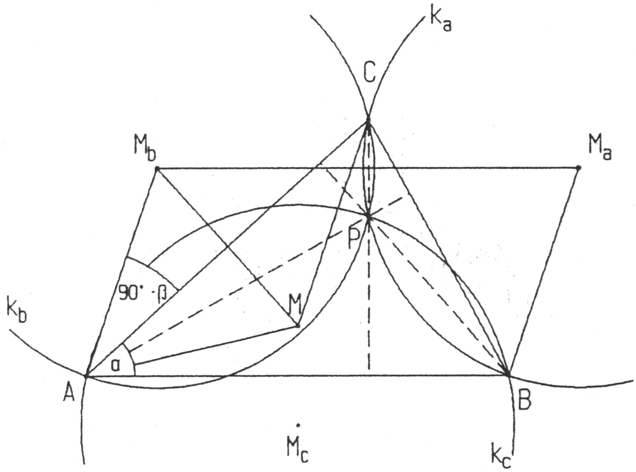

Abb.L 321036

I. Wenn ein Punkt P die geforderte Bedingung erfüllt, so folgt: P liegt auf jedem der drei Kreise k_a , k_b , k_c . Da das Dreieck nicht rechtwinklig ist, liegt M auf keiner der Seiten AB,BC,CA; also geht k bei keiner der drei Spiegelungen in sich selbst über. Daher geht k_c (durch A und B, aber) nicht durch C, also gilt $P \neq C$. Somit schneiden sich k_a und k_b genau in den zwei Punkten C,P, und es folgt

$$CP \perp M_aM_b \; . \tag{1}$$

Wegen der Spiegelung an AC ist $\overline{AM_b} = \overline{AM} = r$ und $\overline{\measuredangle\, CAM_b} = \overline{\measuredangle\, CAM} = 90^\circ - \frac{1}{2}\,\overline{\measuredangle\, CMA} = 90^\circ - \beta$ (Satz über Zentri- und Peripheriewinkel), also $\overline{\measuredangle\, BAM_b} = \alpha + 90^\circ - \beta$. (Hier wird verwendet: Da ABC spitzwinklig ist, liegt M im Innern von ABC, also liegen M_b und B auf verschiedenen Seiten von AC.) Ebenso beweist man $\overline{BM_a} = r$ und $\overline{\measuredangle\, ABM_a} = \beta + 90^\circ - \alpha$. Damit folgt $\overline{AM_b} = \overline{BM_a}$ und $\overline{\measuredangle\, BAM_b} + \overline{\measuredangle\, ABM_a} = 180^\circ$; also ist ABM_aM_b ein Parallelogramm, und es gilt

$$M_bM_a \parallel AB \; . \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $CP \perp AB$. Also liegt P auf der zu AB senkrechten Höhe; ebenso auch auf den anderen Höhen, d.h.:

P ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC.

II. Wenn P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist, so folgt:
Da ABC spitzwinklig ist, liegt P im Innern des Dreiecks. Ist F der Fußpunkt der zu AB senkrechten Höhe, so gilt $\overline{\measuredangle APF} = 90^\circ - \overline{\measuredangle PAB} = \beta$ und ebenso $\overline{\measuredangle BPF} = \alpha$, also $\overline{\measuredangle APB} = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$. Geht P bei Spiegelung an AB in P_c über, so hat das Viereck $ACBP_c$ Innenwinkel der Größen $\overline{\measuredangle ACB} = \gamma$ und $\overline{\measuredangle AP_cB} = \overline{\measuredangle APB} = 180^\circ - \gamma$, ist also ein Sehnenviereck; d.h., P_c liegt auf dem Umkreis k.
Ebenso folgt, daß die Bilder von P bei den Spiegelungen an BC und an CA auf k liegen.

Also erfüllt für jedes spitzwinklige Dreieck genau der Höhenschnittpunkt die Bedingungen der Aufgabe.

Zweiter Lösungsweg:

Wie in II. beweist man, daß der Höhenschnittpunkt die Bedingungen erfüllt.

Angenommen, es gäbe außerdem noch einen weiteren Punkt, der die Bedingungen erfüllt. Dann müßten die drei Kreise k_a, k_b, k_c zwei gemeinsame Punkte haben. Ihre Mittelpunkte lägen folglich auf einer Geraden (nämlich auf der Mittelsenkrechten dieser zwei Punkte). Das aber ist nicht der Fall, wie z.B. daraus hergeleitet werden kann, daß sich die drei Mittelpunkte M_a, M_b, M_c so auf die drei von je einer Seite und zwei Seitenverlängerungen begrenzten Bereiche verteilen, daß jeder dieser Bereiche genau einen der Mittelpunkte enthält. (Es kann auch so hergeleitet werden, daß man [wie in I.] M_a, M_b auf einer Seite von AB mit $M_aM_b \parallel AB$ nachweist, während M_c auf der anderen Seite von AB liegt.)

Weitere Möglichkeit für I.: Liegen die Spiegelbilder P_a, P_b, P_c auf k, so folgt $\overline{\measuredangle BPC} = \overline{\measuredangle BP_aC} = 180^\circ - \alpha$, ebenso $\overline{\measuredangle CPA} = 180^\circ - \beta$ und $\overline{\measuredangle APB} = 180^\circ - \gamma$. Da die Summe dieser drei Winkelgrößen 360° beträgt, muß P im Innern des Dreiecks ABC liegen. Schneidet die Verlängerung von CP die Seite AB in D, so folgt $\overline{\measuredangle BPD} = 180^\circ - \overline{\measuredangle BPC} = \alpha$. Daher ist einerseits wegen der Spiegelung auch $\overline{\measuredangle BP_cD} = \alpha$, andererseits nach dem Peripheriewinkelsatz $\overline{\measuredangle BP_cC} = \overline{\measuredangle BAC} = \alpha$. Also geht die Gerade durch P_c und D auch durch C und folglich (nach Definition von D) auch durch P. Da diese Gerade den Punkt P und seinen Bildpunkt P_c enthält, steht sie senkrecht auf AB; d.h., es gilt $CP \perp AB$. Ebenso folgt $BP \perp CA$ und $AP \perp BC$.

Punktverteilungsvorschläge

<u>321034</u>

Herleitung von Schranken, Diskussion verbleibender Fälle auf Ganzzahligkeit, etwa zunächst für $x \leq y \leq z$. Dabei Punktanteil etwa für

$$\left.\begin{array}{ll} (x;y) = (3;4) \ldots\ldots & 2 \\ " \quad (x;y) = (3;3) \ldots\ldots & 1 \\ " \quad (x;y) = (2;6),(2;5),(2;4) \text{ zusammen} \ldots & 2 \end{array}\right\} \ldots 5$$

Berücksichtigung aller Reihenfolgen, Probe 2

7

<u>321035</u>

Ersichtliche Einsicht, daß mit echten Teilern a,b von n echte Teiler von 11...1 (n Ziffern) nachzuweisen sind 2

Herleitung, daß (z.B.) 11...1 (a Ziffern) ein solcher Teiler ist. Je nach Herleitung z.B.:

Schritt eines Divisionsalgorithmus / Formel für 11...1 ... 2

Ende mit Rest 0 / Ganzzahligkeit des Quotienten ... 2

6

<u>321036</u>

I.Nachweis: Aus der Voraussetzung, k enthalte die Spiegelpunkte von P, folgt: P ist der Höhenschnittpunkt 4

II. Umgekehrter Nachweis 3

7