32. Mathematik-Olympiade
2. Stufe
Aufgaben
Olympiadeklasse 10

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*
Die Nutzung eines Taschenrechners ist zwar gestattet, doch sind die Aufgaben so gefaßt, daß der Taschenrechner keinen wesentlichen Lösungsschritt erschließt. Auch bleibt die Angabe von Begründungen erforderlich, z.B. zum Rechenweg und zur Rechengenauigkeit.

321021

Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl z, die genau vier Teiler t_1 , t_2 , t_3 , t_4 mit $1 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < z$ hat!

321022

An einem Kraftsportwettbewerb nehmen Robert, Stefan und Tilo teil. Robert schafft 20 Klimmzüge. Stefan nimmt sich vor, mindestens 80 % der Leistungen von Robert und Tilo zusammen zu erreichen; Tilo will mindestens 60 % der Leistungen von Robert und Stefan zusammen schaffen.
Gibt es kleinstmögliche Anzahl~~en~~ von Klimmzügen für Stefan und Tilo, so daß beide Vorhaben erfüllt werden? Wenn das der Fall ist, ermitteln Sie diese Anzahlen!

321023

Gegeben seien n zueinander parallele Geraden sowie weitere n zu ihnen senrechte, also untereinander ebenfalls parallele Geraden. Damit entstehen n^2 Schnittpunkte („Gitterpunkte").
Klaus versucht, einen geschlossenen (d.h. zum Anfangspunkt zurückkehrenden) Streckenzug zu zeichnen. Jede Strecke dieses Streckenzuges soll auf einer der gegebenen Geraden liegen, und jeder Gitterpunkt soll genau einmal von dem Streckenzug erreicht werden.

a) Beweisen Sie, daß für n = 4 und für n = 6 der Versuch erfolgreich realisiert werden kann!
b) Beweisen Sie, daß der Versuch für n = 9 nicht erfolgreich realisiert werden kann!

321024

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, einem Quadrat mit einer Seitenlänge von 8 cm mehr als 64 Kreise mit einem Durchmesser von je 1 cm so einzubeschreiben, daß sich je zwei Kreise nicht überschneiden und daß kein Punkt eines Kreises außerhalb des Quadrates liegt!

32. Mathematik-Olympiade
2. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 10

<u>321021 Lösung:</u> <u>8 Punkte</u>

I. Wenn eine natürliche Zahl z aus weniger als drei Primfaktoren zusammengesetzt ist, so hat sie weniger als vier Teiler t mit

$$1 < t < z \; ; \qquad (1)$$

denn $z = 0$, $z = 1$ und alle Primzahlen $z = p$ haben überhaupt keinen Teiler mit (1), und alle Produkte $z = p_1 \cdot p_2$ aus zwei Primzahlen p_1 , p_2 haben keine anderen Teiler mit (1) als p_1 und p_2 , also (sowohl im Fall $p_1 = p_2$ als auch im Fall $p_1 \neq p_2$) weniger als vier solche Teiler.

II. Wenn eine natürliche Zahl z aus genau drei einander gleichen Primfaktoren p zusammengesetzt ist, also $z = p^3$ lautet, so hat sie ebenfalls weniger als vier Teiler mit (1), nämlich nur p und p^2.

III. Die kleinste natürliche Zahl z, für die weder das in I. noch das in II. Betrachtete zutrifft, erhält man als Produkt aus drei Primzahlen, von denen zwei gleich der kleinsten Primzahl 2 sind und eine gleich der nächstgrößeren Primzahl 3 ist; denn dieses Produkt, die Zahl 12, ist außerdem auch kleiner als das kleinste Produkt von vier Primzahlen ($2^4 = 16$).

IV. Für die Zahl 12 sind in der Tat 2, 3, 4, 6 ihre sämtlichen Teiler mit (1). Damit ist 12 als die kleinste natürliche Zahl mit der im Aufgabentext genannten Eigenschaft ermittelt.

Eine <u>andere Lösungsdarstellung</u> ist z.B. möglich mit vollständigem Aufzählen natürlicher Zahlen $t \leq z$, die jeweils Teiler von z sind:

z	nat.Teiler ≤z
0	0
1	1
2	1,2
3	1,3
4	1,2,4

z	nat.Teiler ≤z
5	1,5
6	1,2,3,6
7	1,7
8	1,2,4,8

z	nat.Teiler ≤ z
9	1,3,9
10	1,2,5,10
11	1,11
12	1,2,3,4,6,12

<u>321022 Lösung:</u> <u>11 Punkte</u>

Wenn Stefan s Klimmzüge schafft und Tilo t Klimmzüge, so ist Stefans Vorhaben gleichbedeutend mit

$$s \geq \frac{4}{5}\cdot(20 + t) \qquad (1)$$

und Tilos Vorhaben mit

$$t \geq \frac{3}{5}\cdot(20 + s) \; . \qquad (2)$$

Die Gültigkeit beider Ungleichungen (2),(1) ist äquivalent mit

$$12 + \frac{3}{5}\cdot s \leq t \leq \frac{5}{4}\cdot s - 20 \; . \qquad (3)$$

I. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so folgt

$$12 + \frac{3}{5}\cdot s \leq \frac{5}{4}\cdot s - 20 \; ,$$

$$240 + 12s \leq 25s - 400 \; ,$$

$$13s \geq 640 \; ,$$

$$s \geq 49\frac{3}{13} \; ,$$

wegen der Ganzzahligkeit von s also $s \geq 50$. Aus (2) folgt damit weiter $t \geq 42$.
Wenn es kleinstmögliche Anzahlen gibt, mit denen die Vorhaben erfüllt werden, so können solche kleinstmöglichen Anzahlen s bzw. t folglich nicht kleiner als 50 bzw. 42 sein.

II. Man bestätigt, daß mit diesen Zahlen die Vorhaben erfüllt werden, z.B. da (3) mit $12 + \frac{3}{5}\cdot 50 = 42 < 42\frac{1}{2} = \frac{5}{4}\cdot 50 - 20$ erfüllt ist (oder auch: da 80 % von 20+42 gleich 49,6 sind und 60 % von 20+50 gleich 42 sind).

Mit I. und II. ist gezeigt, daß es kleinstmögliche Anzahlen gibt, so daß beide Vorhaben erfüllt werden; sie lauten 50 bzw. 42 für Stefan bzw. Tilo.

321023 Lösung: 9 Punkte

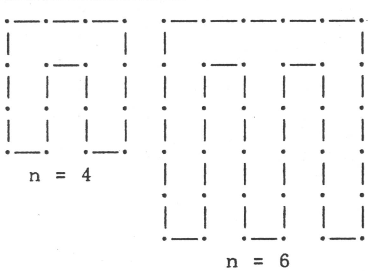

Abb.L 321023

a) Zum Beweis genügt die Angabe von Beispielen wie etwa in Abb.L 321023 gezeigt.

b) Angenommen, es gäbe für n = 9 einen Streckenzug der genannten Art. Von seinem Anfangspunkt aus würde er jeden weiteren Gitterpunkt genau einmal erreichen und am Schluß auch nochmals den Anfangspunkt. Er hätte also ebenso viele „Einheits-Teilstrecken" (Teilstrecken, die benachbarte Gitterpunkte verbinden) wie Gitterpunkte, also $9\cdot 9 = 81$. Andererseits könnte man vom Anfangspunkt an jede Einheits-Teilstrecke, die beim Durchlaufen des Streckenzuges von links nach rechts durchlaufen wird, mit dem Wert 1 belegen und jede Einheits-Teilstrecke, die von rechts nach links durchlaufen wird, mit dem Wert (-1). Würde man nun beim Durchlaufen diese Werte aufsummieren, so würde die am Ende entstandene Summe angeben, ob und um wieviele Strecken der Endpunkt rechts oder links vom Anfangspunkt liegt; diese Summe müßte also gleich 0 sein (da der Anfangspunkt gleich dem Endpunkt wäre). Also müßte es ebenso viele von links nach rechts durchlaufene Einheits-Teilstrecken geben wie von rechts nach links durchlaufene.

Analog würde folgen, daß es ebenso viele von unten nach oben durchlaufene Einheits-Teilstrecken geben müßte wie von oben nach unten durchlaufene. Damit kommt man zu dem Widerspruch, daß der Streckenzug aus einer geraden Anzahl von Einheits-Teilstrecken bestehen müßte. Die Annahme, es gäbe für n = 9 einen Streckenzug der genannten Art, ist somit widerlegt.

Bemerkung zur Korrektur: Die hier als Summenbildung formulierte Argumentation kann auch in mehr anschauungsbezogener Fassung erbracht werden. Der Schluß, daß die aus der Geschlossenheit folgende Geradzahligkeit der Teilstrecken zum Widerspruch mit der Ungeradzahligkeit von n = 9 führt, sollte aber auch bei einer solchen Fassung genügend deutlich vermittelt werden.

321024 Lösung: 12 Punkte

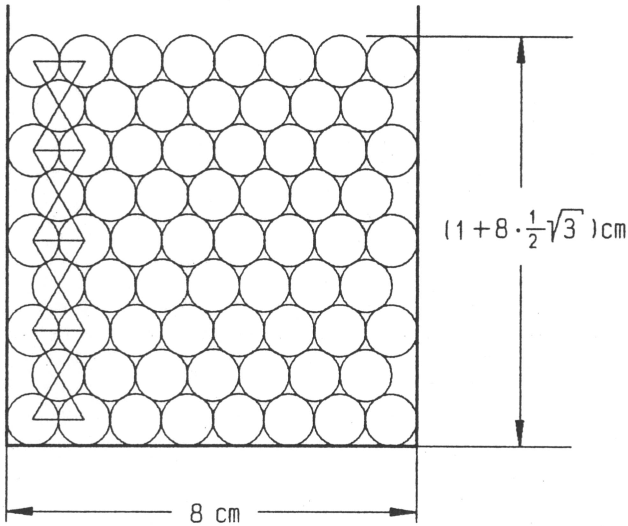

Abb.L 321024

Abb.L 321024 zeigt eine Anordnung von Kreisen in fünf Zeilen zu je 8 Kreisen und vier Zeilen zu je 7 Kreisen. Die Breite dieser Anordnung beträgt 8 cm, die Höhe setzt sich zusammen aus zweimal (ganz unten und ganz oben) einem Kreisradius von je $\frac{1}{2}$ cm und achtmal der Höhenlänge eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge 1 cm ; also beträgt die Höhe dieser Anordnung $(1 + 8\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3})$ cm .

Nun folgt aus $48 < 49$

aber $4\cdot\sqrt{3} < 7$

und damit $1 + 4\cdot\sqrt{3} < 8$;

also können die $5\cdot8 + 4\cdot7 > 64$

Kreise in dieser Anordnung in der genannten Weise einem Quadrat der Seitenlänge 8 cm einbeschrieben werden.

Vorschläge zur Punktverteilung:

321021

Nachweis, daß keine nat.Zahl < 12 die Bedingung erfüllt 5
Nachweis, daß 12 die Bedingung erfüllt 3
8

321022

Erster vorbereitender Schritt, z.B. Übergang zu (1),(2) 4

Übergang (unter Nutzung der Ganzzahligkeit) zur Aussage, daß gesuchte Anzahlen nur $s \geq 50$, $t \geq 42$ sein können 4

Bestätigung, daß sie die Bedingungen erfüllen 3
11

(Die Darstellung muß nicht in dieser Weise gegliedert sein; entsprechend ist die Punktaufteilung anzupassen.)

321023

a)Angabe von Beispielen 3

b)Herleitung der Nichtexistenz, z.B.:

(Ersichtliche) Erkenntnis, daß wegen der Gitterpunktzahl auch 81 (also eine ungerade Anzahl) Teilstrecken auftreten müßten 2

Nachweis, daß wegen der Geschlossenheit des Weges (und unter Nutzung des alleinigen Vorkommens gleichlanger Rechts-Links- und Aufwärts-Abwärts-Teilstrecken) eine gerade Anzahl Teilstrecken auftreten müßten 4
9

321024

Angabe einer Anordnung 4

Ersichtliche Erkenntnis, daß die Höhe vermittels gleichseitiger Dreiecke gefunden werden kann 3

(Von einer zu diesen beiden Schritten ggf. verwendeten Zeichnung ist, wenn sie die genannte Ermittlung der Höhe unterstützt, weder große Genauigkeit noch z.B. Ausführung aller 68 Kreise zu fordern.)

Nachweis, daß die Höhe kleiner als 8 cm ist 5
12