32. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landes-Olympiade)
Olympiadeklasse 9, 1.Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

320931

In einem Land gibt es nur zwei Sorten von Menschen: Edelmänner und Schurken. Jeder Edelmann macht nur wahre Aussagen, jeder Schurke nur falsche Aussagen. Ein nicht aus diesem Land stammender Reporter berichtet, er habe folgendes Gespräch dreier Einwohner A, B und C dieses Landes gehört:

A sagt zu B: „Wenn C ein Edelmann ist, dann bist du ein Schurke."
C sagt zu A: „Du bist von anderer Sorte als ich."

Kann ein solches Gespräch stattgefunden haben? Wenn das der Fall ist, geht dann aus dem Gespräch für jeden der drei A, B, C eindeutig hervor, ob er Edelmann oder Schurke ist, und zu welchen Sorten gehören dann A, B und C ?

320932

Wieviele Paare $(x;y)$ natürlicher Zahlen, für die

$$10x + y < 1993$$

gilt, gibt es insgesamt?

320933

Gegeben ist eine Gerade g und auf ihr drei Punkte A, B, C, in dieser Reihenfolge angeordnet.

(a) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von den Längen $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$ den Radius eines Kreises k, der durch A und B geht und eine durch C gehende Tangente besitzt, die auf g senkrecht steht!

(b) Beweisen Sie, daß es einen Kreis c um C gibt, auf dem alle Berührungspunkte der Tangenten liegen, die von C an alle diejenigen Kreise k gelegt werden, die durch A und B gehen!

32. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landes-Olympiade)
Olympiadeklasse 9, 2.Tag

320934

Ist p eine Primzahl, so sei M_p die Menge aller derjenigen Zahlen z, die sich mit positiven ganzen Zahlen x und y in der Gestalt $z = x^2 + p \cdot y^2$ darstellen lassen. Beweisen Sie, daß für jede Primzahl p die folgende Aussage (*) gilt!

(*) {Wenn eine Zahl z der Menge M_p angehört, dann gehört auch die Zahl z^2 der Menge M_p an.

320935

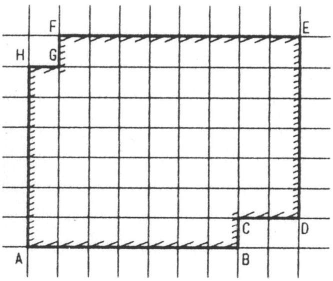

Abb.A 320935

Auf kariertem Papier (eingeteilt in quadratische Karos) ist ein Achteck ABCDEFGH wie in Abb.A 320935 gezeichnet. Jemand will es in zwei kongruente Teilflächen zerschneiden, und zwar sollen sich diese Teilflächen so miteinander zur Deckung bringen lassen, daß dabei A mit E zur Deckung kommt. Die Schnittkurve soll ein zusammenhängender Streckenzug sein, der sich selbst nicht überkreuzt und der nur aus Teilstrecken zusammmengesetzt ist, die auf dem karierten Papier vorgegeben sind.

Beweisen Sie, daß es genau einen Streckenzug gibt, mit dem das Achteck wie gewünscht zerschnitten werden kann!

320936

a) Geben Sie drei ganze Zahlen x, y und z an, für die
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 14z - 57 = 0 \quad (1)$$
gilt!

b) Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Tripel (x;y;z) ganzer Zahlen x, y, z, die die Gleichung (1) erfüllen!

32. Mathematik-Olympiade, 3.Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 9, 1.Tag

320931 Lösung: **6 Punkte**

I. Wenn ein solches Gespräch stattfinden konnte, dann folgt:
Wäre C ein Schurke, so wäre seine Aussage falsch, also wäre A ebenso wie C ein Schurke. Andererseits aber wäre in der von A gemachten „Wenn - dann"-Aussage die Voraussetzung falsch, die Aussage selbst also wahr; A müßte, da er eine wahre Aussage gemacht hätte, ein Edelmann sein. Die Annahme, C wäre ein Schurke, hat damit auf einen Widerspruch geführt; d.h., es folgt:

C ist ein Edelmann. (1)

Weiter folgt: Die Aussage von C ist wahr, somit ist

A ein Schurke. (2)

Also ist die Aussage von A falsch. Das ist, weil darin die Voraussetzung wahr ist, nur so möglich, daß die Behauptung darin falsch ist; d.h., es folgt:

B ist ein Edelmann. (3)

II. Wenn A ein Schurke ist und B und C Edelmänner sind, so ist die Aussage von A falsch (da in ihr die Voraussetzung wahr und die Behauptung falsch ist), A kann seine Aussage also gemacht haben. Ferner ist die Aussage von C wahr (da C und A von verschiedenen Sorten sind), also kann auch C seine Aussage gemacht haben.

Mit II. ist gezeigt, daß das Gespräch stattgefunden haben kann; nach I. geht aus ihm eindeutig hervor, daß A, B und C zu den in (2), (3) bzw. (1) genannten Sorten gehören.

320932 Lösung: **7 Punkte**

Ist $x = 0$, so gilt für natürliche Zahlen y genau dann $10x + y < 1993$, d.h. $y < 1993$, wenn y eine der 1993 Zahlen $0, 1, \ldots, 1992$ ist.

Ist $x = 1$, so gilt für natürliche Zahlen y genau dann $10x + y < 1993$, d.h. $y < 1983$, wenn y eine der 1983 Zahlen $0, 1, \ldots, 1982$ ist.

....

Ist $x = 199$, so gilt für natürliche Zahlen y genau dann $10x + y < 1993$, d.h. $y < 3$, wenn y eine der 3 Zahlen $0, 1, 2$ ist.

Ist $x \geq 200$, so gilt $10x + y \geq 2000$ für jede natürliche Zahl y; für keine natürliche Zahl y gilt daher $10x + y < 1993$.

Die gesuchte Anzahl aller Paare (x;y) natürlicher Zahlen, für die $10x + y < 1993$ gilt, ist folglich $1993 + 1983 + \cdots + 3$.

Diese Summe kann (entweder mit einer als bekannt zitierten Formel oder) z.B. folgendermaßen ermittelt werden: Durch Addition von

$$3 + 13 + \cdots + 1993$$

entsteht das Zweifache der gesuchten Summe. Da die aus 200 Summanden gebildete Summe $1996 + 1996 + \cdots + 1996$

entsteht, beträgt die gesuchte Anzahl $100 \cdot 1996 = 199600$.

320933 Lösung:

7 Punkte

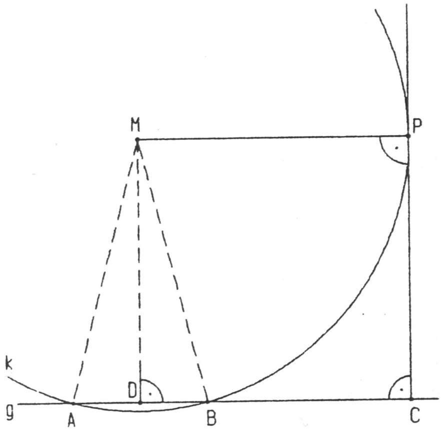

Abb.L 320933 a

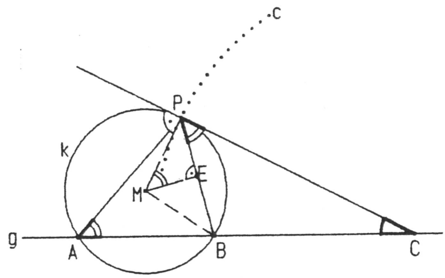

Abb.L 320933 b

(a) Ist M der Mittelpunkt eines genannten Kreises k, ferner P der Berührungspunkt der genannten Tangente, und ist D der Mittelpunkt von AB (Abb.L 320933 a), so gilt $MP \perp PC$ (Radius zum Berührungspunkt und Tangente), $MD \perp DC$ (Seitenhalbierende MD im gleichschenkligen Dreieck ABM ist zugleich Höhe) sowie nach Voraussetzung $DC \perp CP$. Daher ist DCPM ein Rechteck, und der gesuchte Radius beträgt

$$\overline{MP} = \overline{DC} = \frac{1}{2}\,\overline{AB} + \overline{BC} = \frac{a}{2} + b\ .$$

(b) Ist P der Berührungspunkt einer Tangente, die von C an einen durch A und B gehenden Kreis k gelegt wird (Abb.L 320933 b), so gilt

$$\overline{CP}^{\,2} = \overline{CA}\cdot\overline{CB}\ . \qquad (1)$$

Dies kann als bekannter Sachverhalt (Sekanten-Tangentensatz) zitiert oder so bewiesen werden: Nach dem Satz vom Sehnen-Tangentenwinkel ist $\overline{\measuredangle\, CPB} = \overline{\measuredangle\, PAB}$ [auch so zu beweisen: Für den Mittelpunkt M von k und den Mittelpunkt E von BC gilt $\overline{\measuredangle\, CPB} = 90^\circ - \overline{\measuredangle\, BPM} = \overline{\measuredangle\, PME} = \frac{1}{2}\,\overline{\measuredangle\, PMB} = \overline{\measuredangle\, PAB}$ (Zentri-Peripheriewinkelsatz)]. Daraus und aus dem gemeinsamen Innenwinkel bei C folgt $\Delta\, CPB \sim \Delta\, CAP$, also $\overline{CP} : \overline{CB} = \overline{CA} : \overline{CP}$ und damit (1).

Nach (1) liegt P auf dem Kreis c um C mit dem Radius $R = \sqrt{\overline{CA}\cdot\overline{CB}} = \sqrt{(a+b)\cdot b}$. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

In <u>anderer Lösungsmöglichkeit</u> kann man dies auch, ohne Sätze über Winkel am Kreis heranzuziehen, durch mehrmalige Anwendung des Satzes von Pythagoras erhalten: Das Lot von M auf AB halbiert AB und hat, wenn r der Radius von k ist, die Länge $\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{2}}$. Damit folgt weiter $\overline{MC}^2 = r^2 - \frac{a^2}{2} + \left(\frac{a}{2} + b\right)^2$ $= r^2 + ab + b^2$ und hieraus wegen $MP \perp CP$ schließlich $\overline{CP}^2$ $= \overline{MC}^2 - r^2 = (a+b)\cdot b$.

Punktverteilungsvorschläge

<u>320931</u>

Herleitung einer der drei Aussagen (1),(2),(3) 3
Herleitung der beiden anderen Aussagen 2
Bestätigung, daß unter Voraussetzung
von (1),(2),(3) das Gespräch möglich war 1
6

<u>320932</u>

Ersichtlich ausreichendes Vorgehen zur Ermittlung
der Anzahl, z.B. Ausschließen von $x \geq 200$ und
Anzahlen möglicher y für $x = 0,\ldots,199$ 4
Abschließende Ermittlung der Gesamtzahl, z.B. durch
Summation einer zuvor erhaltenen arithmetischen Reihe 3
7

<u>320933</u>

a) Vorbereitende Schlüsse, z.B. (nach Definition
von M,P,D): DCPM ist ein Rechteck 2
Abschließende Ermittlung des Radius 1
b) Herleitung von $\overline{CP} = \sqrt{(a+b)b}$ (durch Zitat oder Beweis
benötigter Sätze oder mehrmalige Anwendung des
Satzes von Pythagoras) 4
7

32. Mathematik-Olympiade, 3.Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 9, 2.Tag

320934 Lösung: 6 Punkte

Wenn z der Menge M_p angehört, also mit positiven ganzen Zahlen x und y in der Gestalt $z = x^2 + p\cdot y^2$ darstellbar ist, so folgt

$$\begin{aligned} z^2 = (x^2 + p\cdot y^2)^2 &= x^4 + 2px^2y^2 + p^2y^4 \\ &= x^4 - 2px^2y^2 + p^2y^4 + 4px^2y^2 \\ &= (x^2 - p\cdot y^2)^2 + p\cdot(2xy)^2 \ . \end{aligned}$$

Setzt man $u = |x^2 - p\cdot y^2|$, $v = 2xy$, so gilt also

$$z^2 = u^2 + p\cdot v^2 \ . \qquad (1)$$

Dabei sind u und v ganze Zahlen; es gilt $u \geq 0$, wegen $x > 0$, $y > 0$ ferner

$$v > 0 \ . \qquad (2)$$

Wäre $u = 0$, so folgte $x^2 = p\cdot y^2$; diese Gleichung führt auf einen Widerspruch,, da der Primfaktor p auf der linken Seite in gerader, auf der rechten Seite in ungerader Anzahl vorkäme. Also ist auch

$$u > 0 \ . \qquad (3)$$

Wegen (1),(3),(2) gehört z^2 der Menge M an, w.z.b.w.

320935 Lösung: 7 Punkte

I. Wenn es eine solche Schnittmöglichkeit gibt, so folgt:

Es gibt eine Bewegung f, bei der eine Teilfläche mit der anderen zur Deckung gebracht wird und A mit E zur Deckung kommt. Die Teilflächen, denen A bzw. E angehören, seien kurz Teilfläche 1 bzw. 2 genannt.

Da die Randkurven der Teilflächen stets nur nach ganzzahligen Vielfachen von Karo-Randstrecken die Richtung wechseln können, muß bei f das im Achteck liegende Karo, das A als Ecke hat, insgesamt mit dem im Achteck liegenden Karo, das E als Ecke hat, zur Deckung kommen. Insbesondere muß die Karo-Randstrecke, die von A aus nach oben geht, als Bild bei f eine der beiden von E nach unten oder links ausgehenden Karo-Randstrecken haben.

Wäre diese Bildstrecke die von E aus nach unten gehende Karo-Randstrecke, so wäre die Bewegung f (durch Angabe der Bilder des Punktes A, des genannten Karos und der genannten Randstrecke) eindeutig bestimmt (nämlich die Drehung um den Mittelpunkt der Strecke AE mit dem Drehwinkel 180°). Bei dieser Bewegung aber ist sowohl das Bild als auch das Urbild des Punktes F (ein- und derselbe Punkt, und zwar) außerhalb des Achtecks gelegen; also könnte F zu keiner der beiden Teilflächen gehören.

Die genannte Bildstrecke muß daher die von E aus nach links gehende Karo-Randstrecke sein. Wieder ist die Bewegung f eindeutig bestimmt (z.B. zu erhalten durch Spiegelung an GB und anschließende Verschiebung um zwei Karos nach rechts).

Würde nun der Rand der Teilfläche 1, von A aus nach oben beginnend durchlaufen, in einem Punkt zwischen A und H die Richtung wechseln und in das Innere des Achtecks hineingehen, so wäre dasselbe für das Bild der Randkurve zwischen E und F der Fall. Die Schnittkurve würde also von einem Punkt zwischen A und H bis zu einem Punkt zwischen E und F durch das Innere des Achtecks verlaufen. Damit folgt der Widerspruch, daß A und E derselben Teilfläche angehören würden.

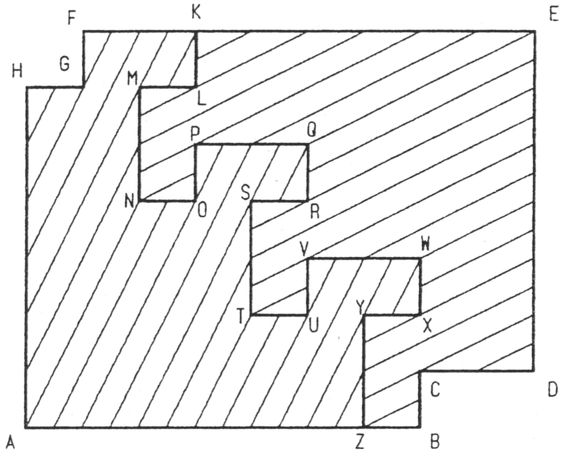

Abb.L 320935

Also enthält der Rand von Teilfläche 1 die gesamte Strecke AH; zur Teilfläche 1 gehören die an diese Strecke angrenzenden Karos des Achtecks und damit als weiteres Randstück die Strecke HG. Zum Rand von Teilfläche 2 gehören folglich die Bildstrecken von AH und HG, nämlich die in Abb.L 320935 gezeigten Strecken AK und KL. Damit aber gehört KL auch zum Rand von Teilfläche 1. Dieser Rand muß also G mit KL verbinden; das ist (wieder, weil A und E nicht derselben Teilfläche angehören, nicht durch das Innere des Achtecks, sondern) nur über die Strecken GF und FK möglich.

Damit ist der Streckenzug AHGFKL als Randteil von Teilfläche 1 nachgewiesen. Sein Bild EKLMNO muß zum Rand von Teilfläche 2 gehören. Also setzt sich der Rand von 1 fort mit LMNO, der Rand von 2 mit dem Bild OPQR. In dieser Weise weiterschließend erhält man die Fortsetzungen RSTU und UVWX. Beim nächsten Fortsetzungsschritt führt bereits der Übergang von UVW zum Bild XYZ auf einen Randpunkt des Achtecks.

Also kann nur der Streckenzug KLMNOPQRSTUVWXYZ eine Schnittkurve sein, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

II. Diese Schnittkurve erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe: Sie ist zusammenhängend, nur aus Teilstrecken zusammengesetzt, die auf dem karierten Papier vorgegeben sind, sie hat keine Überkreuzungen, und die in I. genannte Bewegung f bringt die linke Teilfläche mit der rechten zur Deckung sowie speziell A mit E.

Hinweis zur Korrektur: Die Darstellung von Beweisschritten kann auch in weniger verbaler und mehr anschaulicher Darstellung (z.B. " ... verläuft wie in Abb. ... ") akzeptiert werden.
Jedoch ist zu prüfen, ob - vermeintlich anschauliche - „Schlüsse" in Wirklichkeit *Fälle unbeachtet lassen*. Für einen solchen Schritt sollte der volle Punkt-Anteil nicht gegeben werden. (War er zum Ansatz des Schülers sogar wesentlich, so verbleibt für weitere, aber unwesentliche Schritte nur ein entsprechend kleiner Punkt-Anteil.)

320936 Lösung: 7 Punkte

a) Beispielsweise für $x = -2$, $y = 3$, $z = 0$ gilt

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 14z - 57 \\ = {} & 4 + 9 + 0 + 8 + 36 - 0 - 57 = 0 , \end{aligned}$$

also (1).

b) Die Gleichung (1) ist äquivalent zu

$$(x-2)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = 2^2 + 6^2 + 7^2 + 57 = 146 .$$

Also ist die Anzahl der Tripel $(x;y;z)$ ganzer Zahlen, die (1) erfüllen, gleich der Anzahl der Tripel $(a;b;c)$ ganzer Zahlen, die die Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 146 \qquad (2)$$

erfüllen. Um diese Anzahl zu ermitteln, kann man feststellen: Ist für ganze Zahlen a, b, c eine der Zahlen $|a|$, $|b|$, $|c|$ größer als 12, so kann (2) wegen $a^2 + b^2 + c^2 \geq 13^2 > 146$ nicht erfüllt werden. Ferner gibt es bis auf die Reihenfolge genau die folgenden Möglichkeiten, die Zahl 146 als Summe aus drei Summanden darzustellen, von denen jeder eine der Quadratzahlen 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144 ist:

$$\begin{aligned} 146 &= 144 + 1 + 1 && (3) \\ &= 121 + 25 + 0 && (4) \\ &= 121 + 16 + 9 && (5) \\ &= 81 + 64 + 1 && (6) \\ &= 81 + 49 + 16 . && (7) \end{aligned}$$

Sind in einer dieser Darstellungen die drei Summanden verschieden, so gibt es genau 6 mögliche Reihenfolgen für sie; sind genau zwei der drei Summanden einander gleich, so gibt es genau 3 mögliche Reihenfolgen für sie. Ferner gibt es zu jeder von Null verschiedenen Quadratzahl a^2, b^2 oder c^2 genau 2 Möglichkeiten für a, b bzw. c; dagegen für die Quadratzahl Null genau 1 Möglichkeit. Daher führt

die Zerlegung (3) zu genau $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ Tripeln $(a;b;c)$,
" " (4) " " $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ " " ,
jede der 3 Zerlegungen
(5),(6),(7) zu je " $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ " " .

Also beträgt die gesuchte Anzahl $2 \cdot 24 + 3 \cdot 48 = 192$.

Bemerkung: Natürlich kann auch erst b) gelöst werden; zu a) kann irgend eines der 192 Tripel $(x;y;z)$ angegeben und [durch Berufung auf b) oder unabhängig hiervon durch Probe] bestätigt werden.

Punktverteilungsvorschläge

320934

Rechnerische Darstellung von $(x^2 + py^2)^2$
in der Gestalt $u^2 + pv^2$ 2

Nachweis, daß darin u und v positiv ganzzahlig sind:

Nachweis für $u > 0$ 2

Weitere Nachweise: u,v ganzzahlig, $v > 0$ 2

6

320935

Anfangsschritte zur Herleitung der Schnittkurve,

[je nach Ansatz z.B.:
Die Bewegung muß (die genannte) Gleitspiegelung sein;
die Schnittkurve kann nicht zwischen A und H beginnen,
sie muß mit der Strecke KL beginnen].

Bei ersichtlich ausreichender
Schlüssigkeit solcher Schritte 3

Ermittlung des weiteren Verlaufs der Schnittkurve 3

Bestätigung aller geforderten Eigenschaften
[kann auch aus der vorangehenden Darstellung genügend ersichtlich sein; dann den Punkt dort mit vergeben] 1

7

320936

a) Angabe eines Tripels und Bestätigung von (1) hierfür 1

b) Nachweis, daß (1) nur von endlich vielen Tripeln ganzer Zahlen erfüllt werden kann, z.B. durch Überführung in (2) und Widerlegung von $|a|,|b|,|c| > 12$ 2

Ermittlung der gesuchten Anzahl, z.B. in den Schritten:

Aufzählung aller Tripel $(|a|,|b|,|c|)$
mit (2) und $|a|\geq|b|\geq|c|$ 2

Diskussion von Anzahlen, abhängig
von $|b|=|c|$ oder $|b|\neq|c|$ sowie von $|c|=0$ oder $\neq 0$ 2

7