32. Mathematik-Olympiade
2. Stufe
Aufgaben
Olympiadeklasse 9

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*
Die Nutzung eines Taschenrechners ist zwar gestattet, doch sind die Aufgaben so gefaßt, daß der Taschenrechner keinen wesentlichen Lösungsschritt erschließt. Auch bleibt die Angabe von Begründungen erforderlich, z.B. zum Rechenweg und zur Rechengenauigkeit.

320921

Ein *pythagoreisches Zahlentripel* (a;b;c) besteht aus drei von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen a,b,c, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

a) Geben Sie drei verschiedene Tripel (a;b;c) mit $a \le b$ an und bestätigen Sie, daß es pythagoreische Zahlentripel sind!

b) Warum gibt es kein pythagoreisches Zahlentripel mit $a = b$?

320922

In der Ebene seien vier paarweise verschiedene Geraden gegeben.

a) Welches ist die größtmögliche Anzahl derjenigen Punkte, die Schnittpunkt von (jeweils mindestens) zwei der gegebenen Geraden sind?

b) Stellen Sie fest, welche der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 als Anzahl solcher Schnittpunkte möglich ist und welche nicht!

320923

Beim Tanken eines Oldtimers mit Zweitaktmotor, der ein Öl-Kraftstoff-Gemisch von 1:50 benötigt, wurden zunächst versehentlich 7 Liter Kraftstoff ohne Öl getankt. Wieviel Liter Gemisch mit dem noch lieferbaren Verhältnis $1 : 33\frac{1}{3}$ müssen nun hinzugetankt werden, damit sich das richtige Mischungsverhältnis 1:50 ergibt?
Die gesuchte Literzahl ist auf eine Stelle nach dem Komma genau zu ermitteln.

320924

Auf einer Geraden g seien A,B,C drei Punkte; B liege zwischen A und C. Über der Strecke AC sei nach einer Seite von g das gleichseitige Dreieck ACP errichtet, über den Strecken AB und BC nach der anderen Seite von g die gleichseitigen Dreiecke ABQ und BCR.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen (bei jeder Wahl der Streckenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$) die Mittelpunkte L, M bzw. N der Dreiecke ACP, ABQ bzw. BCR stets die Ecken eines ebenfalls gleichseitigen Dreiecks sind!

32. Mathematik-Olympiade
2. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 9

320921 Lösung: 8 Punkte

a) Drei Beispiele der geforderten Art sind etwa die Tripel mit

$$a = 3 , \quad b = 4 , \quad c = 5 ; \qquad (1)$$
$$a = 6 , \quad b = 8 , \quad c = 10 ; \qquad (2)$$
$$a = 9 , \quad b = 12 , \quad c = 15 . \qquad (3)$$

Zur Bestätigung kann man außer $3^2+ 4^2= 9 + 16 = 25 = 5^2$ und entsprechender weiterer Rechnung z.B. auch allgemeinere Überlegungen, wie die Anwendung von $(a\cdot t)^2+ (b\cdot t)^2 = (a^2+ b^2)\cdot t^2$ mit $t = 2$ bzw. $t = 3$ auf (1), heranziehen.

b) Gäbe es ein pythagoreisches Zahlentripel mit $a = b$, so folgte $2\cdot a^2 = c^2$. Das ist ein Widerspruch, da auf der linken Seite dieser Gleichung der Primfaktor 2 in ungerader Anzahl, auf der rechten Seite aber in gerader Anzahl vorkäme.

320922 Lösung: 11 Punkte

I. Wie Abb.L 320922 zeigt, ist jede der Zahlen 0, 1, 3, 4, 5, 6 als Anzahl solcher Schnittpunkte möglich. (Von den zweifachen Beispielen genügt natürlich je eines.)

II. Die Zahl 2 ist nicht als derartige Anzahl möglich. Beweis: Angenommen, es gäbe paarweise verschiedene Geraden g_1 , g_2 , g_3 , g_4 , für die genau zwei Punkte $P_1 \neq P_2$ als Schnittpunkt von je (mindestens) zwei der Geraden g_1 , g_2 , g_3 , g_4 vorhanden wären. Der Punkt P_1 wäre dann o.B.d.A. der Schnittpunkt von (mindestens) den Geraden g_1 und g_2 ; es wäre insbesondere $g_1 \nparallel g_2$.

1. Läge P_2 auf keiner der Geraden g_1 , g_2 , so müßte P_2 der Schnittpunkt von g_3 und g_4 sein, und es folgte: Mindestens eine der Geraden g_3 , g_4 ginge nicht durch P_1 (da nicht beide mit der Geraden durch P_1 , P_2 übereinstimmen könnten). Diese Gerade, etwa g_3 , wäre wegen $g_1 \nparallel g_2$ zu mindestens einer der Geraden g_1 , g_2 nicht parallel und hätte daher mit ihr einen dritten Schnittpunkt, womit ein Widerspruch erreicht ist.
2. Läge P_2 aber etwa auf g_1 , so müßte P_2 der Schnittpunkt von g_1 mit (mindestens) einer von g_1 und g_2 verschiedenen Geraden sein. Jede solche Gerade müßte aber, damit nicht noch ein dritter Schnittpunkt entsteht, parallel zu g_2 sein. Da es jedoch nur eine Parallele durch P_2 zu g_2 gibt, so folgt, wenn dies etwa g_3 wäre und daher g_4 nicht auch noch durch P_2 gehen könnte: Die Gerade g_4 ginge durch P_1 und hätte, da $g_4 \neq g_2$, also $g_4 \nparallel g_3$ wäre, mit g_3 einen (wegen $g_4 \neq g_1$ von P_2 verschiedenen, also) dritten Schnittpunkt.

III. Mehr als 6 Schnittpunkte können nicht vorkommen, da es nur 6 Möglichkeiten gibt, je zwei aus vier Geraden auszuwählen.

Mit III. und I.(Abbildungsteil für 6 Schnittpunkte) ist 6 als die in a) gesuchte größtmögliche Anzahl von Schnittpunkten nachgewiesen; in I. und II. liegt die in b) geforderte Feststellung vor.

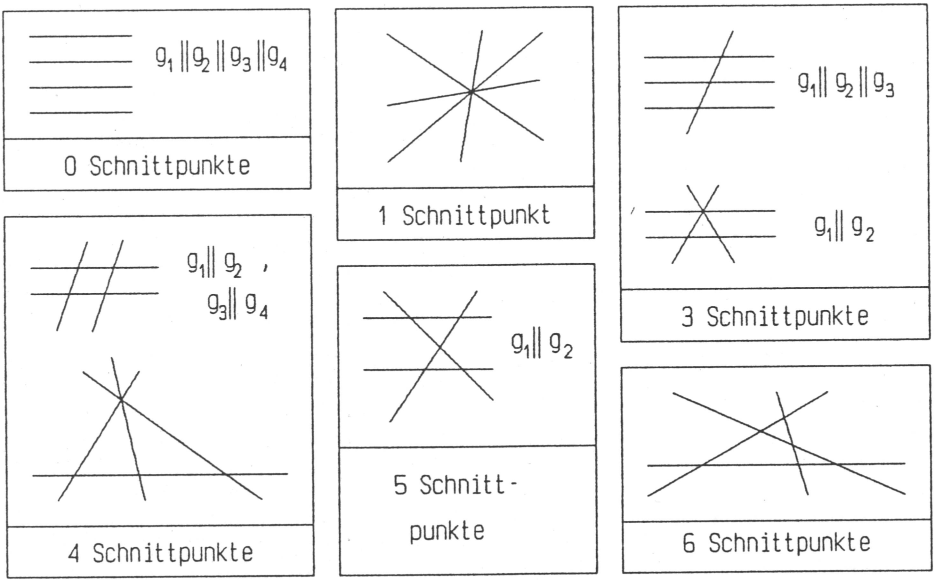

Abb.L 320922

<u>Andere Diskussionsmöglichkeiten</u> ergeben sich z.B. ausgehend von der Fallunterscheidung, welche der Geraden einander parallel sind: Nach *ersichtlich vollständiger* Erfassung aller dieser Fälle kann man weitere Unterfälle danach diskutieren, ob ein Schnittpunkt nichtparalleler Geraden auf einer weiteren Geraden liegt. Wird auch diese Unterscheidung *vollständig* durchgeführt, so zeigt sie, daß *genau* die Schnittpunktzahlen 0,1,3,4,5,6 möglich sind.

<u>320923 Lösung:</u> <u>9 Punkte</u>

In x Litern Gemisch vom Verhältnis $1 : 33\frac{1}{3} = 3:100$ sind

$$\frac{3x}{100} \text{ Liter Öl und } \frac{97x}{100} \text{ Liter Kraftstoff}$$

enthalten. Fügt man dieses Gemisch zu 7 Litern Kraftstoff hinzu, so enthält das entstehende Gemisch

$$\frac{3x}{100} \text{ Liter Öl und } 7 + \frac{97x}{100} \text{ Liter Kraftstoff.}$$

Genau dann hat dieses Gemisch das Mischungsverhältnis 1:50, wenn

$$50 \cdot \frac{3x}{100} = 7 + \frac{97x}{100}$$

gilt. Hiermit ist der Reihe nach äquivalent:

$$150x = 700 + 97x \ ,$$
$$53x = 700 \ ,$$

und man erhält: Es müssen, auf eine Dezimale nach dem Komma genau [wie z.B. aus einem (Taschenrechner-)Ergebnis $700:53 \approx 13{,}2075$ oder aus $53 \cdot 13{,}15 = 696{,}95 < 700 < 702{,}25 = 53 \cdot 13{,}25$ folgt],

$$x \approx 13{,}2$$

Liter hinzugetankt werden.

320924 Lösung: 12 Punkte

Die Mittelpunkte von AC, AB bzw. BC (siehe Abb.L 320924) seien D, E bzw. F . In den Dreiecken ACP, ABQ bzw. BCR sind die Strecken DP, EQ bzw. FR sowohl Seitenhalbierende als auch Höhen. Sie werden durch die Punkte L, M bzw. N im Verhältnis 1:2 geteilt. Damit sowie nach der Formel für die Höhenlänge im gleichseitigen Dreieck ergibt sich, wenn man noch die Lote MU bzw. NV von M bzw. N auf die Verlängerung von PD sowie das Lot MW von M auf die Gerade durch F,R fällt:

$$\overline{MW} = \overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BF} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{1}{2}(a+b) = \overline{AD} = \overline{CD} \,,$$

$$\overline{MU} = \overline{ED} = \overline{AD} - \frac{a}{2} = \frac{b}{2} \,, \qquad \overline{NV} = \overline{FD} = \overline{CD} - \frac{b}{2} = \frac{a}{2} \,,$$

$$\overline{DL} = \frac{1}{6}\cdot\overline{AC}\cdot\sqrt{3} = \frac{1}{6}(a+b)\cdot\sqrt{3} \,, \qquad \overline{DU} = \overline{EM} = \frac{a}{6}\cdot\sqrt{3} \,, \qquad \overline{DV} = \overline{FN} = \frac{b}{6}\cdot\sqrt{3} \,,$$

$$\overline{NW} = \overline{VU} = |\overline{DU} - \overline{DV}| = \frac{1}{6}|a-b|\cdot\sqrt{3} \,,$$

$$\overline{LU} = \overline{DL} + \overline{DU} = \frac{1}{6}(2a+b)\cdot\sqrt{3} \,, \qquad \overline{LV} = \overline{DL} + \overline{DV} = \frac{1}{6}(a+2b)\cdot\sqrt{3} \,.$$

Hiermit folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$\overline{LM}^2 = \overline{LU}^2 + \overline{MU}^2 = \frac{1}{12}\left((2a+b)^2 + 3b^2\right) = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2) \,,$$

$$\overline{LN}^2 = \overline{LV}^2 + \overline{NV}^2 = \frac{1}{12}\left((a+2b)^2 + 3a^2\right) = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2) \,,$$

$$\overline{MN}^2 = \overline{MW}^2 + \overline{NW}^2 = \frac{1}{12}\left(3(a+b)^2 + (a-b)^2\right) = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2) \,,$$

also die Behauptung $\overline{LM} = \overline{LN} = \overline{MN}$.

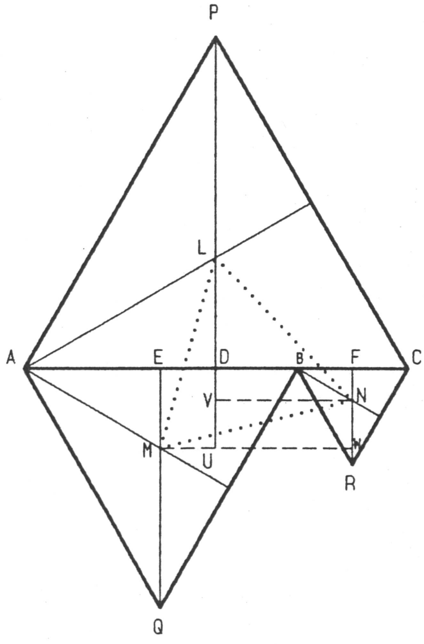

Abb.L 320924

Vorschläge zur Punktverteilung:

320921

a)Angabe von Beispielen und (ersichtliche) Bestätigung als pythagoreische Tripel 4

b)Unmöglichkeitsnachweis zu a=b 4

8

320922

a)Nachweis, daß mehr als 6 Schnittpunkte nicht möglich sind .. 2
Nachweis, daß 6 Schnittpunkte möglich sind 2

b)Nachweis, daß auch 1,3,4,5 Schnittpunkte möglich sind 4
Nachweis, daß 2 Schnittpunkte nicht möglich sind 3

11

(Wie schon oben im Lösungstext ersichtlich, können diese erforderlichen Teilnachweise in anderer Reihenfolge bzw. Zusammenfassung in der Darstellung enthalten sein; entsprechend ist die Punktaufteilung anzupassen.)

320923

Übergang zu einer Gleichung
oder entsprechend nutzbarer Vorbereitungsschritt 5

Lösen der Gleichung
bzw. sonstiger abschließender Herleitungsschritt 4

9

320924

Die verschiedenen möglichen schrittweisen Beweismöglichkeiten sind in etwa gleichwertige Einzelschritte zu gliedern; im obigen Lösungstext den 12 hergeleiteten Gleichungen entsprechend oder, günstiger zusammengefaßt, etwa:

Ermittlung der Längen von Strecken parallel zu AC 4
" " " " " senkrecht zu AC 5
" " " $\overline{LM}$, $\overline{LN}$, $\overline{MN}$ 3

12