32. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landes-Olympiade)
Olympiadeklasse 8, 1.Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

320831

Sind a,b,c die Hunderter-, Zehner- bzw. Einerziffer einer dreistelligen natürlichen Zahl, so sei diese Zahl kurz durch $\overline{abc}$ bezeichnet. Ebenso sei jeweils eine zweistellige Zahl mit Zehner- bzw. Einerziffer b und c durch $\overline{bc}$ bezeichnet.

Ermittle alle diejenigen a,b,c, für die $\overline{abc}$ eine dreistellige und $\overline{bc}$ eine zweistellige Zahl ist, so daß die Gleichung

$$\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^b$$

gilt!

320832

Um einen Behälter mit Wasser füllen zu können, soll eine Anzahl Röhren angelegt werden. Durch jede Röhre soll das Wasser gleichmäßig strömen (d.h. in gleichen Zeiten gleichviel Wasser). In einer Stunde soll durch jede Röhre die gleiche Wassermenge zuströmen wie durch jede andere Röhre.

Für die Anzahl der Röhren gibt es drei Vorschläge.

Nach dem zweiten Vorschlag, zwei Röhren weniger als beim ersten Vorschlag zu nehmen, würde das Füllen des Behälters zwei Stunden länger dauern als beim ersten.

Nach dem dritten Vorschlag, vier Röhren mehr als beim ersten Vorschlag zu nehmen, würde das Füllen des Behälters zwei Stunden kürzer dauern als beim ersten.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Röhren und die Zeit zum Füllen des Behälters beim ersten Vorschlag!

320833

Beweise die beiden folgenden Aussagen (a) und (b) für jedes spitzwinklige Dreieck ABC mit einem im Innern des Dreiecks gelegenen Punkt P ! Dabei seien folgende Bezeichnungen verwendet:

Winkel	Größe
∡ PBA	δ
∡ PCA	δ'

Winkel	Größe
∡ PCB	ε
∡ PAB	ε'

Winkel	Größe
∡ PAC	φ
∡ PBC	φ'

(a) Wenn die Gleichungen $\delta = \delta'$ und $\varepsilon = \varepsilon'$ und $\varphi = \varphi'$ gelten, dann ist P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC.

(b) Wenn P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist, dann gelten die Gleichungen $\delta = \delta'$ und $\varepsilon = \varepsilon'$ und $\varphi = \varphi'$.

32. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landes-Olympiade)
Olympiadeklasse 8, 2.Tag

320834

Ein Radfahrer fuhr mit konstanter Geschwindigkeit über eine 100 m lange Brücke. Als er auf dieser Brücke 40 m zurückgelegt hatte, traf er einen zweiten Radfahrer, der ihm mit gleicher Geschwindigkeit entgegenkam. Ein Auto, das auf derselben Straße mit der Geschwindigkeit 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fuhr, begegnete dem zweiten Radfahrer in dem Augenblick, als dieser die Brücke verließ, und es überholte den ersten Radfahrer genau am anderen Ende der Brücke.
Ermittle aus diesen Angaben die Geschwindigkeit der Radfahrer!

320835

Beweise, daß für jedes Dreieck ABC die folgende Aussage gilt!

> Das Verhältnis des Flächeninhalts des Dreiecks ABC zum Flächeninhalt seines Inkreises ist gleich dem Verhältnis des Umfangs des Dreiecks ABC zum Umfang seines Inkreises.

Hinweis: Als *Inkreis* eines Dreiecks bezeichnet man denjenigen Kreis, der alle drei Seiten dieses Dreiecks von innen berührt.

320836

In der linken Waagschale einer gleicharmigen Waage steht eine Kerze, in der rechten stehen drei Kerzen. Die vier Kerzen sind so beschaffen, daß jede von ihnen während je einer Minute Brenndauer die gleiche Masse verliert wie jede andere von ihnen. Die linke Kerze würde zum vollständigen Herunterbrennen 84 Minuten brauchen, von den drei rechten Kerzen die erste 70 Minuten, die zweite 63 Minuten, die dritte 35 Minuten.
Die vier Kerzen werden gleichzeitig angezündet. Wie lange danach ist die Waage erstmals im Gleichgewicht?

32. Mathematik-Olympiade, 3.Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 8, 1.Tag

320831 Lösung: 7 Punkte

I. Wenn a,b,c Ziffern der geforderten Art sind, so folgt:

Es kann nicht b = 0 sein, da hierfür $\overline{bc}$ nicht zweistellig wäre.
Es kann nicht b = 1 sein, da hierfür $\left(\overline{bc}\right)^b = \overline{bc}$ wäre, also nicht gleich der dreistelligen Zahl $\overline{abc}$ sein könnte.
Es kann nicht $b \geq 3$ sein, da hierfür $\left(\overline{bc}\right)^b \geq 30^3$ mindestens fünfstellig wäre, also nicht gleich der dreistelligen Zahl $\overline{abc}$ sein könnte. Also muß

$$b = 2$$

sein und somit $\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^2$ gelten. Daher muß c die Einerziffer der Zahl c^2 sein. Wegen $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$ kann dies für c = 2: 3; 4; 7; 8; 9 nicht zutreffen, trifft also höchstens für c = 0; 1; 5; 6 zu. Weiter ist an den Zehnerziffern von $20^2 = 400$, $21^2 = 441$, $26^2 = 676$ ersichtlich: Die Zahl $\left(\overline{bc}\right)^2$ mit b = 2 hat für c = 0; 1; 6 nicht die durch $\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^2$ geforderte Zehnerziffer 2; sie kann dies (unter den Möglichkeiten c = 0; 1; 5; 6) also nur für

$$c = 5$$

haben. Hiermit führt schließlich $25^2 = 625$ auf

$$a = 6 .$$

II. Von a = 6, b = 2, c = 5 wird wegen $625 = 25^2$ die geforderte Gleichung $\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^b$ erfüllt.

Mit I. und II. ist gezeigt: Es sind genau a = 6, b = 2, c = 5 Ziffern der geforderten Art.

320832 Lösung: 7 Punkte

Beim ersten Vorschlag seien n Röhren sowie eine Füllzeit von t Stunden vorgesehen. Jede Röhre füllt dann in jeder Stunde $\frac{1}{n \cdot t}$ des Behältervolumens.

Die n-2 Röhren des zweiten Vorschlags füllen also in jeder Stunde $\frac{n-2}{n \cdot t}$ des Behältervolumens; der Behälter wird nach diesem Vorschlag somit in $\frac{n \cdot t}{n-2}$ Stunden gefüllt. Da dies 2 Stunden mehr als beim ersten Vorschlag sind, gilt $\frac{n \cdot t}{n-2} = t+2$

und daher

$$n \cdot t = n \cdot t - 2t + 2n - 4 ,$$
$$t = n-2 . \qquad (1)$$

Entsprechend folgt: Nach dem dritten Vorschlag wird der Behälter in $\frac{n \cdot t}{n+4}$ Stunden gefüllt, und es gilt

$$\frac{n \cdot t}{n+4} = t-2 ,$$
$$n \cdot t = n \cdot t + 4t - 2n - 8 ,$$
$$t = \frac{n}{2} + 2 . \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt
$$n-2 = \frac{n}{2} + 2 ,$$
$$n = 8$$
und damit nach (1)
$$t = 6 .$$

Also war beim ersten Vorschlag vorgesehen, mit 8 als Anzahl der Röhren eine Füllzeit von 6 Stunden zu erreichen.

<u>320833 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Die Verlängerung von AP schneide BC in D, die Verlängerung von BP schneide CA in E, die Verlängerung von CP schneide AB in F (siehe Abb.L 320833).

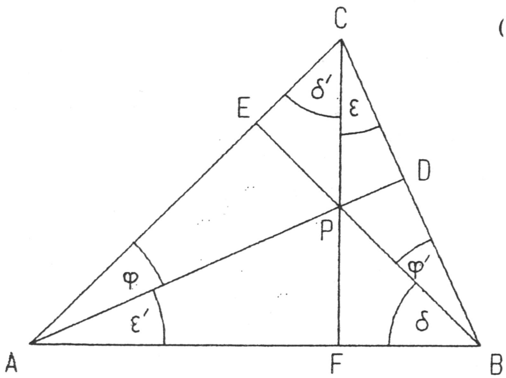

Abb.L 320833

(a) Aus dem Außenwinkelsatz, angewandt auf die Dreiecke BFC und AFC, sowie aus den vorausgesetzten Gleichungen folgt

$$\overline{\measuredangle\ AFC} = \delta + \varphi' + \varepsilon = \delta' + \varphi + \varepsilon' = \overline{\measuredangle\ BFC}.$$

Ferner gilt, da $\measuredangle$ AFC, $\measuredangle$ BFC Nebenwinkel voneinander sind,

$$\overline{\measuredangle\ AFC} + \overline{\measuredangle\ BFC} = 180^\circ;$$

daher folgt

$$\overline{\measuredangle\ AFC} = \overline{\measuredangle\ BFC} = 90^\circ,$$

also ist CF im Dreieck ABC die zu AB senkrechte Höhe. Entsprechend folgt, daß AD und BE die anderen Höhen sind und damit P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist.

(b) Die Dreiecke ABE und ACF stimmen in ihrem Innenwinkel bei A überein, ferner ist nach Voraussetzung $\overline{\measuredangle\ AEB} = \overline{\measuredangle\ AFC} = 90^\circ$. Daher folgt nach dem Innenwinkelsatz: Es gilt auch $\delta = \delta'$. Entsprechend folgen die anderen behaupteten Gleichungen.

<u>Zweiter Lösungsweg:</u> Man löst erst (b) wie im 1.Lösungsweg und kommt dann, wie oft bei ähnlichen geometrischen Aufgaben, durch einen indirekten Beweis zur Umkehrung (a):

Wäre P vom Höhenschnittpunkt P^* verschieden, so folgte (wenn entsprechend zu den Bezeichnungen δ, δ', ε, ε', φ, φ' die Größen der Winkel $\measuredangle P^*BA$, $\measuredangle P^*CA$, $\measuredangle P^*CB$, $\measuredangle P^*AB$, $\measuredangle P^*AC$, $\measuredangle P^*BC$ mit δ^*, δ'^*, ε^*, ε'^*, φ^*, φ'^* bezeichnet werden): Mindestens eine der Winkelgrößen $\delta^*, \dots, \varphi'^*$ wäre kleiner als die entsprechende der Größen $\delta, \dots, \varphi'$; o.B.d.A. wäre etwa $\delta^* < \delta$. Ferner würden außer den vorausgesetzten Gleichungen auch nach (b) die Gleichungen $\delta^* = \delta'^*$, $\varepsilon^* = \varepsilon'^*$, $\varphi^* = \varphi'^*$ gelten. Damit aber folgte (wegen des Zerlegens der Innenwinkel des Dreiecks ABC) aus $\delta^* < \delta$ der Reihe nach $\varphi'^* > \varphi'$, $\varphi^* > \varphi$, $\varepsilon'^* < \varepsilon'$, $\varepsilon^* < \varepsilon$, $\delta'^* > \delta'$, $\delta^* > \delta$, womit ein Widerspruch erreicht ist.

Punktverteilungsvorschläge

<u>320831</u>

Schluß auf b = 2	2
Schluß auf c = 5	3
Schluß auf a = 6, Probe	2
	7

<u>320832</u>

Schluß aus der Angabe, 2 Röhren weniger $\longrightarrow$ 2 Stunden mehr	2
" " " " 4 " " " 2 " "	2
Ermittlung der gesuchten Angaben (z.B. Gleichungslösen)	3
	7

<u>320833</u>

a) Vorbereitende Aussagen, z.B.: Schluß auf $\overline{\measuredangle AFC} = \overline{\measuredangle BFC}$ oder [nach b):] Einführung der $\delta^*, \dots, \varphi'^*$; o.B.d.A.: $\delta^* < \delta$	2
Folgerung: P ist Höhenschnittpunkt [$P \neq P^*$ ist widerlegt]	3
b) Herleitung der behaupteten Gleichungen	2
	7

32. Mathematik-Olympiade, 3.Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 8, 2.Tag

320834 Lösung: 6 Punkte

Die gesuchte Geschwindigkeit der Radfahrer sei v . Die Zeit t_1 , in der der erste Radfahrer auf der Brücke fuhr, bis er dem zweiten Radfahrer begegnete, ist genau so lang wie die anschließende Zeit t_2 , bis der zweite Radfahrer die Brücke verließ (und dabei dem Auto begegnete); denn in beiden Zeiten t_1 , t_2 war dieselbe Strecke mit der gleichen Geschwindigkeit v zu durchfahren. Daher hat der erste Radfahrer in der Zeit t_2 weitere 40 m zurückgelegt und mußte folglich in einer anschließenden Zeit t_3 noch $(100 - 2\cdot 40)$ m = 20 m bis zum Ende der Brücke zurücklegen. In dieser Zeit t_3 durchfuhr das Auto die Strecke 100 m, also eine 5 mal so lange Strecke wie der Radfahrer. Daher war die Geschwindigkeit des Autos 5 mal so groß wie die des Radfahrers; d.h., es gilt $70\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 5\cdot v$. Also beträgt die gesuchte Geschwindigkeit

$$v = \frac{70}{5}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 14\,\frac{\text{km}}{\text{h}} .$$

320835 Lösung: 6 Punkte

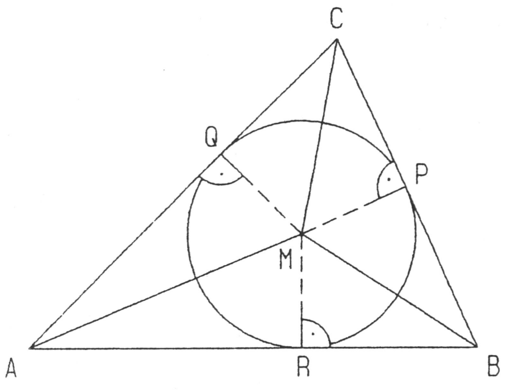

Abb.L 320835

Die Seitenlängen des Dreiecks seien mit $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$ und $c = \overline{AB}$ bezeichnet, der Inkreis habe den Mittelpunkt M, er berühre die Seiten BC, CA, AB in äP, Q bzw. R (Abb.L 320835).

Der Radius des Inkreises ist dann $r = \overline{MP} = \overline{MQ} = \overline{MR}$, ferner gilt $MP \perp BC$, $MQ \perp CA$, $MR \perp AB$.

Daher haben die Dreiecke BCM, CAM, ABM die Flächeninhalte

$$F_1 = \frac{1}{2}ar,\ F_2 = \frac{1}{2}br \text{ bzw. } F_3 = \frac{1}{2}cr.$$

Da M im Innern des Dreiecks ABC liegt, hat dieses somit den Flächeninhalt $F_D = F_1 + F_2 + F_3 = \frac{1}{2}(a + b + c)\cdot r$, der Inkreis hat den Flächeninhalt $F_K = \pi\cdot r^2$. Diese Flächeninhalte bilden also das Verhältnis

$$F_D : F_K = (a + b + c) : (2\pi r) .$$

Damit ist die zu beweisende Aussage gezeigt; denn a + b + c ist der Umfang des Dreiecks, und $2\pi r$ ist der Umfang des Inkreises.

320836 Lösung: 7 Punkte

Es sei m die Masse, die jede der vier Kerzen während einer Minute Brenndauer verliert. Dann hat die linke Kerze die Masse 84m, und die rechten Kerzen haben die Massen 70m, 63m bzw. 35m.

Nach x Minuten Brenndauer befindet sich, solange $x \leq 35$ bleibt, auf der linken bzw. auf der rechten Waagschale die Masse $(84-x)m$ bzw. die Masse $(70-x + 63-x + 35-x)m = (168 - 3x)m$. Aus $x \leq 35$ folgt aber $2x \leq 70$, also erst recht $2x < 84$ und daraus weiter $84 - x < 168 - 3x$. Daher ist während der Brenndauer bis 35 Minuten die linke Waagschale stets leichter als die rechte.

Von da an, also nach x Minuten Brenndauer mit $x > 35$, befindet sich, solange $x \leq 63$ bleibt, auf der linken bzw. auf der rechten Waagschale die Masse $(84-x)m$ bzw. die Masse $(70-x + 63-x)m = (133 - 2x)m$. Hiermit ergibt sich genau dann Gleichgewicht, wenn

$$84 - x = 133 - 2x$$

oder, äquivalent hierzu, $x = 49$

gilt.

Also ist die Waage erstmals 49 Minuten nach dem Anzünden der vier Kerzen im Gleichgewicht.

Bemerkung: Der Nachweis, daß während der Brenndauer der kleinsten Kerze noch kein Gleichgewicht eintritt, ist nicht entbehrlich. Er kann auch (anstelle direkten Schlußfolgerns aus $x \leq 35$, das - wie hier - ohne besondere motivierende Hinführung erfolgen kann) mit indirekter Beweisführung erfolgen: Die Annahme, während der Brenndauer aller vier Kerzen ergäbe sich Gleichgewicht, führt (mit obigen Bezeichnungen auf die Gleichung $84 - x = 168 - 3x$ und damit) auf die Brenndauer 42 Minuten, was der größtmöglichen Brenndauer der kleinsten Kerze widerspricht.

Punktverteilungsvorschläge

320834

Vorbereitende Folgerung (z.B.: In der Zeit t_3 legt der Radfahrer 20 m zurück 3

Schluß auf die gesuchte Geschwindigkeit 3

6

320835

Herleitung von $F = \frac{1}{2}(a + b + c)\cdot r$ 3

Herleitung der behaupteten Verhältnisgleichheit 3

6

320836

Nachweis: Kein Gleichgewicht, während 4 Kerzen brennen 2

Herleitung einer Beziehung für Gleichgewicht bei 3 Kerzen 3

Ermittlung der gesuchten Zeit 2

7