32. Mathematik-Olympiade
2. Stufe
Aufgaben
Olympiadeklasse 8

<u>Hinweis:</u>*Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*
Die Nutzung eines Taschenrechners ist zwar gestattet, doch sind die Aufgaben so gefaßt, daß der Taschenrechner keinen wesentlichen Lösungsschritt erschließt. Auch bleibt die Angabe von Begründungen erforderlich, z.B. zum Rechenweg und zur Rechengenauigkeit.

<u>320821</u>
Herr Schulz, der in diesem Jahrhundert geboren wurde, stellt fest, daß er an seinem Geburtstag im Jahr 1992 ein Lebensalter erreicht, das (in Jahren gerechnet) gleich dem Vierfachen der Quersumme der Jahreszahl seines Geburtsjahres ist.

Untersuche, ob es genau ein Jahr gibt, mit dem als Geburtsjahr die Feststellung von Herrn Schulz zutrifft! Ist das der Fall, so nenne diese Jahreszahl!

<u>320822</u>

Auf einer Kreislinie k um einen Punkt M seien drei Punkte A,B,C so gelegen, daß $MA \perp MB$ sowie $\overline{BC} = \overline{MB}$ gilt und daß sich die Strecken AC und MB in einem Punkt S schneiden.

Untersuche, ob durch diese Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle BSC$ eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, dann gib diese Größe an!

<u>320823</u>
Es sei ABCD ein Tangentenviereck, sein Umfang sei u, der Radius seines Inkreises sei r.
Zeige, daß bereits durch die alleinige Vorgabe von u und r der Flächeninhalt von ABCD eindeutig bestimmt ist; ermittle diesen Flächeninhalt in Abhängigkeit von u und r !

<u>Hinweis:</u> Ein Viereck ABCD ist genau dann ein *Tangentenviereck*, wenn es einen Kreis enthält, der jede Seite von ABCD in einem Punkt zwischen den Endpunkten dieser Seite berührt. Dieser Kreis heißt dann der *Inkreis* von ABCD.

<u>320824</u>
In der linken Waagschale einer gleicharmigen Waage stehen drei Kerzen, in der rechten steht eine Kerze. Die vier Kerzen sind so beschaffen, daß jede von ihnen während je einer Stunde Brenndauer die gleiche Masse verliert wie jede andere von ihnen. Jede der drei linken Kerzen würde zum vollständigen Herunterbrennen 9 Stunden brauchen, die rechte Kerze 12 Stunden.

Die vier Kerzen werden gleichzeitig angezündet. Wie lange danach ist die Waage erstmals im Gleichgewicht?

32. Mathematik-Olympiade
2. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 8

320821 Lösung: 11 Punkte

Ist a die Einer- und b die Zehnerziffer der Jahreszahl eines Jahres aus diesem Jahrhundert, so sind a und b natürliche Zahlen mit $0 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$, die Jahreszahl lautet $1900 + 10b + a$, ihre Quersumme beträgt $1 + 9 + b + a$. Ist ein solches Jahr das Geburtsjahr von Herrn Schulz, so erreicht er im Jahr 1992 ein Lebensalter von $1992 - (1900 + 10b + a)$ Jahren.
Wenn die Feststellung von Herrn Schulz zutrifft, gilt daher

$$1992 - (1900 + 10b + a) = 4 \cdot (1 + 9 + b + a) .$$

Hieraus folgt

$$92 - 10b - a = 40 + 4b + 4a ,$$
$$52 - 14b = 5a .$$

Wäre $b \geq 4$, so folgte $5a \leq 52 - 14 \cdot 4 < 0$ im Widerspruch zu $a \geq 0$. Wäre $b = 0$ oder $b = 1$ oder $b = 2$, so folgte $5a = 52$ bzw. $5a = 38$ bzw. $5a = 24$, was durch natürliche Zahlen a nicht erfüllbar ist. Also kann nur $b = 3$ sein, wonach $5a = 10$, also $a = 2$ folgt. Daher kann die Feststellung nur mit 1932 als Geburtsjahr zutreffen.
Sie trifft hiermit in der Tat zu; denn die Quersumme von 1932 ist $1 + 9 + 3 + 2 = 15$, und das im Jahr 1992 erreichte Lebensalter beträgt $1992 - 1932 = 60 = 4 \cdot 15$.
Also gibt es genau ein Jahr, mit dem die Feststellung zutrifft; es ist das Jahr 1932.

320822 Lösung: 10 Punkte

Als Radien von k haben MB und MC einander gleiche Länge; hiernach und wegen $\overline{BC} = \overline{MB}$ ist Dreieck MBC gleichseitig, also gilt $\overline{\measuredangle BMC} = 60°$. Daraus und aus $MA \perp MB$ folgt[1] $\overline{\measuredangle AMC} = 60° + 90° = 150°$.

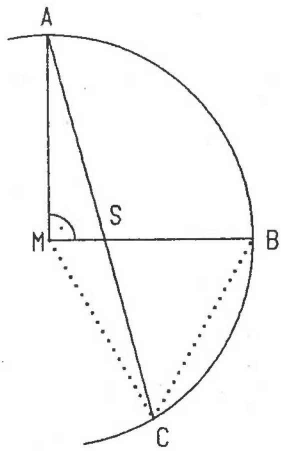

Abb.L 320822

Daher und weil Dreieck MAC mit $\overline{MA} = \overline{MC}$ gleichschenklig ist, folgt aus dem Basis- und dem Innenwinkelsatz

$$\overline{\measuredangle MAC} = \overline{\measuredangle MCA} = \tfrac{1}{2}(180° - \overline{\measuredangle AMC})$$
$$= \tfrac{1}{2}(180° - 150°) = 15°.$$

Aus $MA \perp MB$ und nochmals dem Innenwinkelsatz, auf Dreieck MAS angewandt, folgt damit

$$\overline{\measuredangle MSA} = 90° - \overline{\measuredangle MAC} = 75°.$$

Schließlich ergibt sich nach dem Scheitelwinkelsatz, daß auch

$$\overline{\measuredangle BSC} = 75°$$

gilt. Diese Winkelgröße ist damit durch die Voraussetzungen eindeutig bestimmt.

1) Fußnote nächste Seite!

320823 Lösung: 8 Punkte

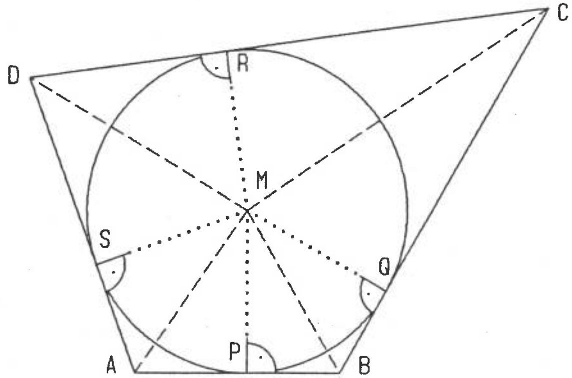

Abb.L 320823

Nach Voraussetzung berührt ein Kreis k die Seiten AB,BC,CD,DA in Punkten P,Q,R bzw. S. Ist M der Mittelpunkt von k, so ist jeweils MP,MQ,MR bzw. MS senkrecht auf AB,BC,CD bzw. DA.

Mit $r = \overline{MP} = \overline{MQ} = \overline{MR} = \overline{MS}$ ist folglich jeweils $\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot r$, $\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot r$, $\frac{1}{2}\cdot\overline{CD}\cdot r$ bzw. $\frac{1}{2}\cdot\overline{DA}\cdot r$ der Flächeninhalt von ABM, BCM, CDM bzw. DAM.

Daraus folgt[2]: Der Flächeninhalt F von ABCD beträgt

$$F = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot r + \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot r + \frac{1}{2}\cdot\overline{CD}\cdot r + \frac{1}{2}\cdot\overline{DA}\cdot r$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA})\cdot r = \frac{1}{2}\cdot u\cdot r$$

und ist so durch u und r eindeutig bestimmt.

---

[1] Hinweis zur Korrektur: Hier wird herangezogen, daß A und C (wegen der Voraussetzung über das Schneiden von AC und MB) auf verschiedenen Seiten der Geraden durch M,B liegen. Es kann akzeptiert werden, wenn *ohne explizite Erwähnung* dieses Sachverhalts die Möglichkeit des obigen Schlusses vom Schüler bemerkt wurde, z.B. nach einer Skizze, die die Lageverhältnisse zutreffend wiedergibt.

[2] Ähnlich wie bei der vorigen Fußnote wird eine explizite Angabe von Lageaussagen, mit denen sich ABCD als zusammengesetzt aus ABM, BCM, CDM, DAM ergibt, nicht vom Schüler verlangt.

320824 Lösung: 11Punkte

Es sei m die Masse, die jede der vier Kerzen während einer Stunde Brenndauer verliert. Dann hat jede der drei linken Kerzen die Masse 9m, und die rechte Kerze hat die Masse 12m. Nach x Stunden Brenndauer befindet sich folglich, solange $x \leq 9$ bleibt, auf der linken bzw. auf der rechten Waagschale die Masse $3\cdot(9 - x)m$ bzw. die Masse $(12 - x)m$.
Hiermit ergibt sich genau dann Gleichgewicht, wenn

$$3\cdot(9 - x) = 12 - x$$

gilt. Das ist der Reihe nach äquivalent mit

$$27 - 3x = 12 - x ,$$
$$2x = 15 ,$$
$$x = 7\tfrac{1}{2} .$$

Also ist die Waage erstmals $7\frac{1}{2}$ Stunden nach dem Anzünden der vier Kerzen im Gleichgewicht.

Vorschläge zur Punktverteilung:

320821

Nutzung der Bedingung Alter = 4·Quersumme, z.B. zum Herleiten einer Gleichung	4
Ermitteln der Lösung in ganzzahligen Werten $0 \leq a,b \leq 9$, damit Ermittlung der gesuchten Jahreszahl	5
Probe (auf die Textforderung oder auf Erfülltsein einer Gleichung, falls diese als äquivalent hierzu erkannt war)	2
	11

320822

Herleitg. einer ersten nutzbaren Beziehung, z.B. $\overline{\measuredangle AMC} = 150^\circ$	4
" " weiteren " " " $\overline{\measuredangle MAC} = 15^\circ$	3
" des Ergebnisses $\overline{\measuredangle BSC} = 75^\circ$	3
	10

320823

Nutzung des Senkrechtseins Tangente zu Radius	4
Addition der Flächeninhalte; damit Ergebnis	4
	8

320824

Nutzung der Gleichgewichtsforderung, z.B. unter Einführung passender Variabler als Gewinnen einer Gleichung	6
Herleitung des Ergebnisses, im Beispiel vermittels Auflösen der Gleichung	5
	11