32. Mathematik-Olympiade, 3.Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 7, 1.Tag

320731 Lösung: 6 Punkte

Jede mögliche Verteilung ist bereits durch die Anzahlen der in A befindlichen Kugeln eindeutig festgelegt.

a) Für diese Anzahlen gibt es genau die Möglichkeiten der folgenden Tabelle:

Verteilung Nr.	1	2	3	4	5	6
rot	0	1	1	2	2	3
gelb	2	1	2	0	1	0
blau	1	1	0	1	0	0

Das sind insgesamt 6 Verteilungen.

b) Jede nun zu ermittelnde Verteilung kann erhalten werden, indem man jeweils bei einer Verteilung aus a) feststellt, welche Nummern die Kugeln tragen können:

Verteilung Nr.1 führt so zu genau .... 1 Verteilung, da in A bereits die einzige blaue Kugel und alle gelben Kugeln liegen müssen.

Bei Verteilung Nr.2 kann jede der vier roten und jede der zwei gelben Kugeln in A liegen. Das führt zu genau $4 \cdot 2$ = ... 8 Verteilungen.

Bei Verteilung Nr.3 müssen in A alle gelben Kugeln sein, jede der vier roten Kugeln kann in A liegen; das ergibt genau .... 4 Verteilungen.

Bei Verteilung Nr.4 liegt in A die einzige blaue Kugel, für die Nummern der roten Kugeln gibt es genau die Möglichkeiten (1;2),(1;3),(1;4),(2;3),(2;4),(3;4): .... 6 Verteilungen.

Verteilung Nr.5: In A kann jede dieser sechs Zusammenstellungen roter Kugeln und jede der zwei gelben Kugeln liegen; das führt auf genau $6 \cdot 2$ = ... 12 Verteilungen.

Verteilung Nr.6: Für die Kugeln in A ist genau eine der vier roten Kugeln wegzulassen; somit gibt es hierfür genau .... 4 Verteilungen.

Das sind insgesamt 1+8+4+6+12+4 = 35 Verteilungen.

320732 Lösung: 7 Punkte

In den Dreiecken BCS bzw. DAS seien e bzw. f die Längen der Seiten BS bzw. DS, und h bzw. k seien die Längen der auf diesen Seiten senkrechten Höhen (siehe Abb.L 320732).
Dann sind k und h auch in den Dreiecken ABS bzw. CDS die Längen der zu den Seiten BS bzw. DS senkrechten Höhen.

Also sind die vorausgesetzten Flächeninhalte bzw. der gesuchte Flächeninhalt

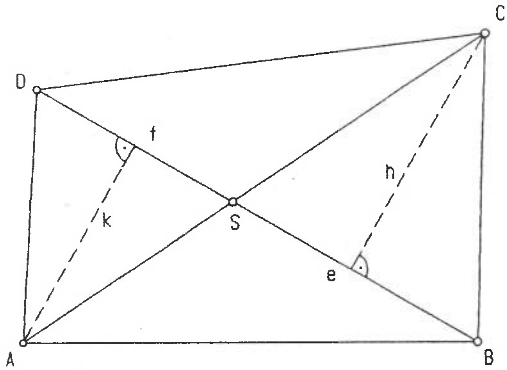

Abb.L 320732

$$\frac{e \cdot k}{2} = 1000 \text{ cm}^2, \quad \frac{f \cdot k}{2} = 800 \text{ cm}^2,$$

$$\frac{e \cdot h}{2} = 1200 \text{ cm}^2, \quad \frac{f \cdot h}{2} = F \,.$$

Daraus folgt $f:e = 800:1000 = 4:5$,

$$f = \frac{4e}{5} \;;$$

d.h., durch die Voraussetzungen ist eindeutig bestimmt

$$F = \frac{4e \cdot h}{5 \cdot 2} = \frac{4}{5} \cdot 1200 \text{ cm}^2 = 960 \text{ cm}^2 .$$

320733 Lösung: 7 Punkte

a) Aus der Lage von P,Q,R auf den genannten Verlängerungen und aus den Voraussetzungen

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} \,, \qquad (1)$$

$$\overline{BP} = \overline{CQ} = \overline{AR} \qquad (2)$$

folgt auch

$$\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR} \,. \qquad (3)$$

Die Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck ABC betragen 60°, für ihre Nebenwinkel gilt daher

$$\overline{\measuredangle \text{ PAR}} = \overline{\measuredangle \text{ QBP}} = \overline{\measuredangle \text{ RCQ}} = 120° . \qquad (4)$$

Aus (2), (3), (4) folgt nach dem Kongruenzsatz sws

$$\Delta \text{ APR} \cong \Delta \text{ BQP} \cong \Delta \text{ CRQ}$$

und damit $\overline{RP} = \overline{PQ} = \overline{QR}$, w.z.b.w.

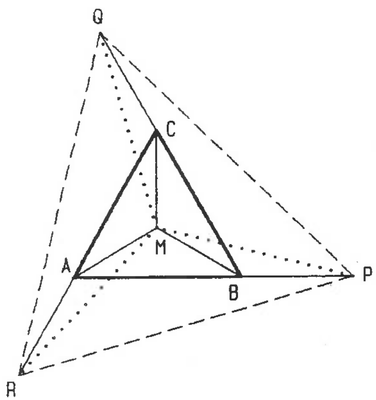

Abb.L 320733

b) Im gleichseitigen Dreieck ABC ist der Umkreismittelpunkt M zugleich Inkreismittelpunkt, d.h., AM, BM und CM halbieren die Innenwinkel des Dreiecks[1], also gilt

$$\overline{\measuredangle\ MAP} = \overline{\measuredangle\ MBQ} = \overline{\measuredangle\ MCR} = 30^\circ.$$

Daraus und aus (4) ergibt sich[2]

$$\overline{\measuredangle\ MAR} = \overline{\measuredangle\ MBP} = \overline{\measuredangle\ MCQ} = 150^\circ. \tag{5}$$

Aus (2),(5) und $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ (Radien des Umkreises) folgt nach dem Kongruenzsatz sws

$$\Delta\ MAR \cong \Delta\ MBP \cong \Delta\ MCQ$$

und damit die Behauptung $\overline{MR} = \overline{MP} = \overline{MQ}$.

<u>Zweiter Lösungsweg:</u> Durch eine Drehung der Ebene um den Punkt M als Drehzentrum kann A in B und zugleich B in C sowie C in A übergeführt werden, da MA, MB, MC als Radien des Umkreises einander gleichlang sind und da sie den Vollwinkel um M in drei einander gleichgroße Teilwinkel zerlegen [Kongruenzsatz sss, mit diesen Radien und (1) auf die Dreiecke ABM, BCM, CAM angewandt].

Da bei Drehungen die Eigenschaften der Lage von P,Q,R auf den Verlängerungen und der dabei vorausgesetzten Abstände erhalten bleiben, geht bei dieser Drehung P in Q, Q in R und R in P über. Damit erbringen die weiteren - ebenfalls als bekannter Sachverhalt heranzuziehenden - Drehungseigenschaften $\overline{MP} = \overline{MQ} = \overline{MR}$ [Gleichheit jeweils des Abstandes Drehzentrum-Urbildpunkt mit dem Abstand Drehzentrum-Bildpunkt] sowie $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RP}$ [Gleichheit der Abstände Urbildpunkt-Bildpunkt jeweils für alle Urbildpunkte einheitlicher Entfernung zum Drehzentrum] die Behauptungen b) bzw. a).

---

[1] Dies kann auch mit Kongruenzsatz sss aus den Voraussetzungen $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$, $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ erhalten werden.

[2] Hier wird verwendet, daß M auf derselben Seite der Geraden durch A,B liegt wie C, also nicht auf derselben Seite wie R (da nach Voraussetzung C und R auf verschiedenen Seiten dieser Geraden liegen). Die Angabe solcher Lagebetrachtungen wird nicht vom Schüler verlangt.

Punktverteilungsvorschläge

320731

a) Anzahl der Verteilungen [z.B. ermittelt
durch Aufzählung] 2

b) Anzahl der Verteilungen [z.B. ermittelt
durch Diskussion der Fortsetzungen zu a)] 4

6

320732

Vorbereitende Relationen, z.B. Flächenformeln, f:e = 4:5 4

Ermittlung von F 3

7

320733

Vorbereitende Aussagen, z.B.: APR ≅ BQP ≅ CRQ
oder: Drehung ergibt $P \longrightarrow Q \longrightarrow R$ 3

Herleitung zu a) 2

Herleitung zu b) 2

7

32. Mathematik-Olympiade, 3.Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 7, 2.Tag

320734 Lösung: 6 Punkte

Eine natürliche Zahl n hat genau dann eine durch 9 teilbare Quersumme, wenn n selbst durch 9 teilbar ist. Ferner ist n wegen der Teilerfremdheit von 5 und 9 genau dann durch 5 und 9 teilbar, wenn n durch 45 teilbar, d.h. mit einer natürlichen Zahl k von der Form $n = 45 \cdot k$ ist.

Wegen $45 \cdot 2222 = 99990$, $45 \cdot 2223 = 100035$

sowie $45 \cdot 22222 = 999990$, $45 \cdot 22223 = 1000035$

sind die Zahlen $45 \cdot k$ mit natürlichen k genau für

$$k = 2223, \ldots, 22222$$

sechsstellig. Da dies $22222 - 2222 = 20000$ Werte k sind, ist damit die gesuchte Anzahl 20000 ermittelt.

320735 Lösung: 7 Punkte

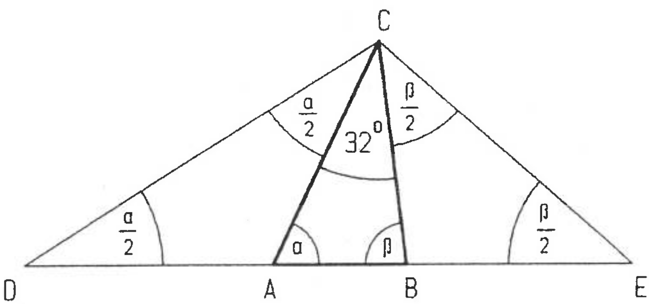

Abb.L 320735

Im Dreieck ABC seien α bzw. β die Größen der Innenwinkel bei A bzw. B. Das Dreieck ACD ist mit $\overline{AD} = \overline{AC}$ gleichschenklig, nach dem Basiswinkelsatz und dem Außenwinkelsatz gilt daher

$$\overline{\sphericalangle\ ACD} = \overline{\sphericalangle\ ADC} = \frac{\alpha}{2}\ .$$

Ebenso folgt

$$\overline{\sphericalangle\ BCE} = \overline{\sphericalangle\ BEC} = \frac{\beta}{2}\ .$$

Folglich ist

$$\overline{\measuredangle\, DCE} = \overline{\measuredangle\, ACB} + \overline{\measuredangle\, ACD} + \overline{\measuredangle\, BCE} = 32^\circ + \frac{\alpha+\beta}{2} .$$

Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC ist aber

$$\alpha+\beta = 180^\circ - 32^\circ = 148^\circ .$$

Damit ist gezeigt, daß durch die Voraussetzungen die Winkelgröße

$$\overline{\measuredangle\, DCE} = 32^\circ + \frac{148^\circ}{2} = 32^\circ + 74^\circ = 106^\circ$$

eindeutig bestimmt ist.

<u>320736 Lösung:</u> <u>7 Punkte</u>

Wenn das Volumen des Beckens x Kubikmeter beträgt, so folgt aus den Angaben: In jeder Minute strömen aus der geöffneten ersten Leitung $\frac{x}{120}$ Kubikmeter, aus der zweiten $\left(\frac{x}{120} + 50\right)$ Kubikmeter. Das Volumen des Beckens, das durch beide Leitungen in 48 Minuten gefüllt wird, beträgt daher $48\cdot\left(\frac{x}{120} + \left(\frac{x}{120} + 50\right)\right)$ Kubikmeter.

Also muß die Gleichung

$$48\cdot\left(2 \cdot \frac{x}{120} + 50\right) = x \qquad (1)$$

gelten. Aus (1) folgt durch Multiplikation mit 5

$$\frac{48\cdot 10x}{120} + 48\cdot 250 = 5x ,$$

$$4x + 12000 = 5x ,$$

$$x = 12000 .$$

Somit ist durch die Angaben eindeutig bestimmt: Das Volumen des Beckens beträgt 12000 Kubikmeter.

<u>Bemerkungen zur Korrektur:</u> <u>1.</u>Da der Aufgabentext nur die Eindeutigkeit, aber nicht die Existenz eines Volumens (Verträglichkeit der gegebenen Angaben miteinander und mit einer Volumenangabe) nachzuweisen verlangt, erfordert er keine Probe. Sicherheitshalber mag sie zweckmäßig sein, in der (Teil-)Punktanforderung hat sie aber nicht aufzutreten. [Sie kann als Probe zur Gleichung (1) oder anschaulich-inhaltlich etwa so verlaufen: Durch die erste Leitung strömen je Minute 12000:120 m^3 = 100 m^3, durch die zweite also (100+50) m^3 = 150 m^3; und daher füllen in der Tat beide Leitungen in 48 Minuten das Volumen 48·(100+150) m^3 = 12000 m^3.]
Zur Lösung würde es nicht ausreichen, das Volumen 12000 m^3 allein durch Bestätigung von Übereinstimmungen der eben ausgeführten Art als erwiesen zu betrachten; denn auf diesem Wege ergibt sich nicht die geforderte Aussage zur Eindeutigkeit.

<u>2.</u> Der hier vermittels Gleichungslösen beschriebene Lösungsweg kann auch insgesamt mehr in Gestalt anschaulich-inhaltlicher Schlüsse dargestellt werden. Die eben genannte Anforderung an das logische Vorgehen (Schluß von den gegebenen Angaben auf das Volumen, nicht umgekehrt) gilt auch zu einer solchen Darstellung.

Punktverteilungsvorschläge

320734

Vorbereitungsschritt, z.B. Teilbarkeit durch 45 3

Schluß auf die Anzahl 3

6

320735

Winkel $\alpha/2$ bzw. $\beta/2$ bei D,C bzw. bei E,C 4

Größe von ∡ DCE 3

7

320736

Übergang zu einer Gleichung, etwa (1),
oder (bei anschaulich-inhaltlichem
Vorgehen) verwendbare Schlußfolgerungen 4

Lösen der Gleichung bzw. (sonstiges
Vorgehen) abschließende Volumenermittlung 3

7