32. Mathematik-Olympiade
2. Stufe
Aufgaben
Olympiadeklasse 7

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen, Nebenrechnungen und (bei Konstruktionsaufgaben) Hilfslinien soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*
Die Nutzung eines Taschenrechners ist zwar gestattet, doch sind die Aufgaben so gefaßt, daß der Taschenrechner keinen wesentlichen Lösungsschritt erschließt. Auch bleibt die Angabe von Begründungen erforderlich, z.B. zum Rechenweg und zur Rechengenauigkeit.

<u>320721</u>
In einer Diskussion werden drei verschiedene Aufgabenstellungen betrachtet:

a) Die Zahl 231 soll als Produkt dargestellt werden. Jeder Faktor soll eine Primzahl sein.

b) Die Zahl 231 soll als Produkt aus genau drei Faktoren dargestellt werden. Jeder Faktor soll eine natürliche Zahl sein. Je zwei der Faktoren sollen voneinander verschieden sein.

c) Dieselbe Aufgabe wie b) wird mit 462 statt 231 gestellt.

Gib zu a),b) und c) jeweils alle verschiedenen Darstellungen an! Dabei gelten Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Faktoren unterscheiden, nicht als verschieden. Begründe, daß du alle gesuchten Darstellungen angegeben hast!

<u>320722</u>
ABCD sei ein Quadrat, sein Flächeninhalt betrage 25 cm^2. Ein Punkt E liege so auf der Verlängerung der Diagonale AC über C hinaus, daß die Strecke AE doppelt so lang wie die Strecke AC ist.

Ermittle unter diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Vierecks ABED !

<u>320723</u>
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei B und mit $\overline{AB}$ = 5 cm , $\overline{BC}$ = 3 cm . Die Mittelsenkrechte von AC schneide AC in M und AB in E.

a) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Winkel $\sphericalangle$ MEA und $\sphericalangle$ MCB einander gleichgroß sind!

b) Ein Punkt D liege so auf der Geraden durch E und M, daß AC den Winkel $\sphericalangle$ DAB halbiert. Beweise, daß das Viereck ABCD dann ein Trapez sein muß!

<u>320724</u>

In einem Hallenbad befindet sich auch ein Planschbecken für Kinder. Es kann durch eine Warmwasserleitung und eine Kaltwasserleitung bis zu einer markierten Höhe gefüllt werden. Würde man nur die Warmwasserleitung betreiben, so würde es $12\frac{1}{2}$ Minuten dauern, bis der Wasserspiegel diese Höhe erreicht. Nur mit der Kaltwasserleitung würde man 10 Minuten dazu brauchen.

Um eine vorgesehene Wassertemperatur zu erreichen, wurde zunächst $2\frac{1}{2}$ Minuten lang aus beiden Leitungen Wasser eingelassen; dann wurde die Warmwasserleitung geschlossen. Berechne die Zeit, die danach noch gebraucht wurde, um allein mit der Kaltwasserleitung den Rest des Beckens bis zur markierten Höhe zu füllen!

32. Mathematik-Olympiade
2. Stufe
Lösungen
Olympiadeklasse 7

320721 Lösung: **10 Punkte**

a) Es gilt $$231 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \,. \qquad (1)$$
3, 7 und 11 sind Primzahlen. Die Darstellung einer natürlichen Zahl als Produkt von Primzahlen ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig. Also ist (1) die einzige in a) gesuchte Darstellung.

b) Jeder Faktor soll eine natürliche Zahl $\neq 0$ sein, also entweder die Zahl 1 oder eine Primzahl oder ein Produkt mehrerer Primzahlen. Da je zwei der Faktoren voneinander verschieden sein sollen, darf die Zahl 1 höchstens einmal als Faktor vorkommen. Also kommen für b) außer der Darstellung (1) mit ihren drei Faktoren noch genau diejenigen Darstellungen hinzu, in denen ein Faktor 1 lautet, ein Faktor eine Primzahl ist und der dritte das Produkt der beiden anderen Primzahlen:
$$231 = 1 \cdot 3 \cdot 77 \,, \qquad (2)$$
$$231 = 1 \cdot 7 \cdot 33 \,, \qquad (3)$$
$$231 = 1 \cdot 11 \cdot 21 \,. \qquad (4)$$

c) Wegen der Zerlegung von 462 in die vier Primfaktoren 2, 3, 7 und 11 gibt es genau folgende in c) gesuchte Darstellungen:
Wenn kein Faktor 1 lautet, sind zwei Faktoren Primzahlen, der dritte ist das Produkt der beiden anderen Primzahlen:
$$462 = 2 \cdot 3 \cdot 77 \,, \qquad (1)$$
$$462 = 2 \cdot 7 \cdot 33 \,, \qquad (2)$$
$$462 = 2 \cdot 11 \cdot 21 \,, \qquad (3)$$
$$462 = 3 \cdot 7 \cdot 22 \,, \qquad (4)$$
$$462 = 3 \cdot 11 \cdot 14 \,, \qquad (5)$$
$$462 = 7 \cdot 11 \cdot 6 \,. \qquad (6)$$
Wenn ein Faktor 1 lautet, so gilt: Entweder ist ein weiterer Faktor eine Primzahl und der dritte das Produkt der drei anderen Primzahlen; oder jeder der Faktoren außer der 1 ist das Produkt aus zwei Primzahlen:
$$462 = 1 \cdot 2 \cdot 231 \,, \qquad (7)$$
$$462 = 1 \cdot 3 \cdot 154 \,, \qquad (8)$$
$$462 = 1 \cdot 7 \cdot 66 \,, \qquad (9)$$
$$462 = 1 \cdot 11 \cdot 42 \,; \qquad (10)$$
$$462 = 1 \cdot 6 \cdot 77 \,, \qquad (11)$$
$$462 = 1 \cdot 14 \cdot 33 \,, \qquad (12)$$
$$462 = 1 \cdot 22 \cdot 21 \,. \qquad (13)$$

320722 Lösung: **9 Punkte**

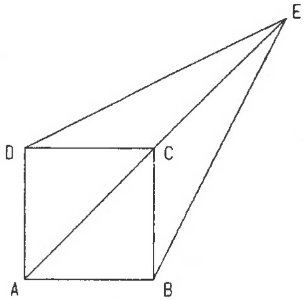

Abb.L 320722

Die Dreiecke AED und ACD haben D als gemeinsame Ecke, die der Seite AE bzw. der (in AE enthaltenen) Seite AC gegenüberliegt; sie haben also dieselbe zu diesen Seiten senkrechte Höhe. Daher und wegen $\overline{AE} = 2\cdot\overline{AC}$ hat AED doppelt so großen Flächeninhalt wie ACD.
Ebenso (mit B statt D) folgt: AEB hat doppelt so großen Flächeninhalt wie ACB.
Damit erhält man: Der Flächeninhalt von ABED ist das Zweifache des Flächeninhaltes von ABCD; somit beträgt er 50 cm^2.

<u>320723 Lösung:</u> <u>10 Punkte</u>

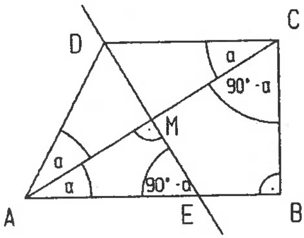

Abb.L 320723

a) Mit $\overline{\measuredangle BAC} = \alpha$ gilt wegen AM ⊥ ME bzw. AB ⊥ BC nach dem Innenwinkelsatz, auf die Dreiecke AME bzw. ABC angewandt,

$$\overline{\measuredangle MEA} = \overline{\measuredangle MCB} = 90^\circ - \alpha .$$

b) Da AC den Winkel ∡ DAB halbiert, ist

$$\overline{\measuredangle DAC} = \overline{\measuredangle BAC} .$$

Da ferner D auf der Mittelsenkrechten von AC liegt, gilt $\overline{AD} = \overline{CD}$. Nach dem Basiswinkelsatz ist also

$$\overline{\measuredangle DCA} = \overline{\measuredangle DAC}.$$

Somit gilt $\overline{\measuredangle BAC} = \overline{\measuredangle DCA}$, und nach der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes folgt AB ∥ DC . Damit ist ABCD als ein Trapez nachgewiesen.

<u>320724 Lösung:</u> <u>11 Punkte</u>

Die Warmwasserleitung füllt das Becken in $12\frac{1}{2}$ Minuten, d.h. in $\frac{25}{2}$ Minuten, also füllt sie in einer Minute $\frac{2}{25}$ des Beckens. Ebenso füllt die Kaltwasserleitung in einer Minute $\frac{1}{10}$ des Beckens. Somit wurden zunächst von beiden Leitungen zusammen in je einer Minute

$$\frac{2}{25} + \frac{1}{10} = \frac{9}{50}$$

des Beckens gefüllt; in $2\frac{1}{2}$ Minuten, d.h. in $\frac{5}{2}$ Minuten, folglich

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{9}{50} = \frac{9}{20}$$

des Beckens.
Danach blieben somit als Rest noch

$$1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$$

des Beckens zu füllen. Wegen

$$\frac{11}{20} : \frac{1}{10} = \frac{11}{2}$$

war dieser Rest $\frac{11}{2}$ mal so groß wie $\frac{1}{10}$ des Beckens, d.h. wie derjenige Teil des Beckens, der in einer Minute allein durch die Kaltwasserleitung gefüllt werden kann.
Also wurden für das Füllen des Restes noch $\frac{11}{2}$ Minuten, d.h. $5\frac{1}{2}$ Minuten gebraucht.

Vorschläge zur Punktverteilung:

320721
a)Angabe der Zerlegung, Erkennen ihrer Eindeutigkeit 2
b)Ersichtlich begründetes Auffinden der Zerlegungen 3
c) " " " " " 5
(Insbesondere bei dieser Aufgabe ist sinngemäße Akzeptanz altersgerechter Ausdrucksweise angebracht.) 10

320722
Je nach Beweisweg sind unterschiedlich anspruchsvolle Beweisteile zu berücksichtigen; bei obigem Lösungsweg etwa:

Flächeninhalt von AED:
Nutzung der Identität der Höhen 2
Anwendung der Voraussetzung $\overline{AE} = 2 \cdot \overline{AC}$ ..... 3 } 5
Flächeninhalt von AEB 4
9

320723
a)Beweis zu $\overline{\sphericalangle MEA} = \overline{\sphericalangle MCB}$ 4
b)Berücksichtigung, daß Winkel $\sphericalangle$ DAB halbiert wird, ... 2
" " D auf der Mittelsenkr.von AC liegt ... 2
Abschließende Herleitung von AB ‖ DC 2
10

320724
Je nach Beweisweg sind unterschiedlich anspruchsvolle Beweisteile zu berücksichtigen; bei obigem Lösungsweg etwa:

Beide Leitungen füllen je Minute 9/50 des Beckens............ 5
" " " in 2 1/2 Minuten 9/20 des Beckens...... 3
Das Füllen der restlichen 11/20 dauert 11/2 Minuten 3
11
[Umrechnung (in 5 1/2 Minuten oder 5min,30sec o.ä.) wird nicht gefordert.]